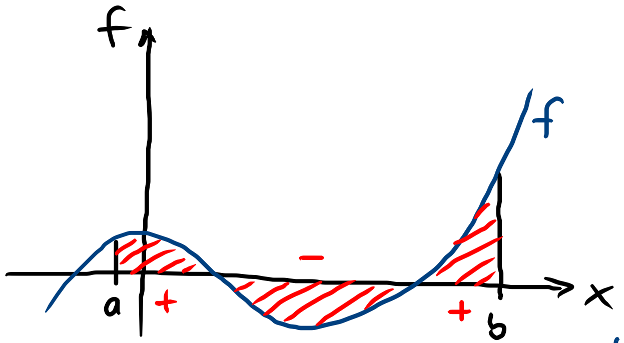
VI. Integrale

VI.1 Gewöhnliche Integrale

ein Ziel: Berechnen von Flächen unter Graphen von Funktionen



Fläche $F_a^b =: \int_a^b dx\; f(x)$

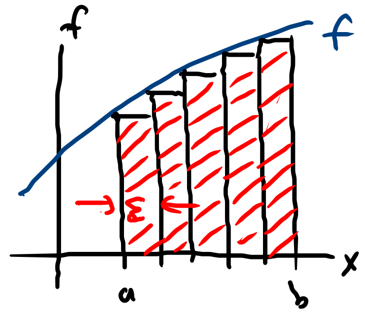
Stilisiertes Σ (Leibniz 1675)

Differenzial

Integrand

Beziehung zu Σ: $\displaystyle\int_a^b dx\; f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \cdot f(a+n\varepsilon)$

$N\varepsilon = b - a$



Eigenschaften: (6.1)

$$\int_b^a dx\; f(x) := -\int_a^b dx\; f(x) \quad \curvearrowright \quad \int_a^a dx\; f(x) = 0$$

$$\int_a^b dx\; \text{konst} = \text{konst.} \cdot (b-a), \qquad f(-x) = -f(x) \curvearrowright \int_{-a}^a dx\; f(x) = 0$$

$$\int_a^b dx\; (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \int_a^b dx\; f(x) + \beta \int_a^b dx\; g(x), \qquad \int_a^b dx\; f + \int_b^c dx\; f = \int_a^c dx\; f$$

$$\int_a^b dx\; f(x) = \int_{a+c}^{b+c} dx\; f(x-c), \qquad \int_a^b dx\; f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\; f(\lambda x)$$

Hauptsatz: betrachte $\int_a^b dx\, f(x)$ als Funktion von b:

$$\int_a^b dx\, f(x) =: I(b,a)$$

wackele an oberer Grenze b

$$I(b+\varepsilon,a) - I(b,a) = \left(\int_a^{b+\varepsilon} - \int_a^b\right) dx\, f(x) = \int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x) \overset{\varepsilon \text{ sehr klein}}{=} \varepsilon \cdot f(b) + O(\varepsilon^2)$$

$$\xrightarrow[\lim \varepsilon\to 0]{\div\varepsilon} \quad \partial_b I(b,a) = \partial_b \int_a^b dx\, f(x) = f(b)$$

Def.: eine Stammfunktion F zu einer Funktion f erfüllt $F' = f$

„Anti-Ableitung", „Aufleitung", nur bis auf Konstante festgelegt

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \quad I(b,a) = F(b) + C \quad \leftarrow \text{konst.} \\ \text{für } b=a: \quad I(a,a) = 0 = F(a) + C \end{array}\right\} \Rightarrow \quad I(b,a) = F(b) - F(a)$$

Fazit: $$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx\, \frac{dF}{dx}(x) = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (6.2)$$

Integrieren ist eine Kunst. Aber es gibt Tricks!

z.B. Symmetrie: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx \, \frac{\sin x}{1+x^2} = 0$ weil $f(-x) = -f(x)$

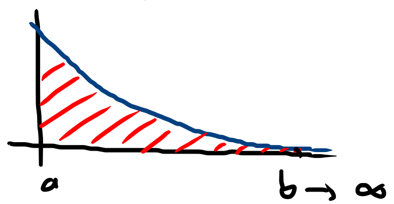
Lösungsstrategie: f skizzieren, umformen, Ansätze probieren

Bsp.: $$\int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \, \tan x \overset{\text{sym}}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \, \tan x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \, \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\underset{\text{raten}}{\overset{\cos' = -\sin}{=}} -\int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \, \frac{d}{dx} \ln\cos x \overset{\text{Hauptsatz}}{=} -\ln\cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= -\ln\cos \pi/4 + \ln\cos \pi/6 = -\ln\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \ln\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

uneigentliche Integrale: Flächen, die sich bis ∞ (oder $-\infty$) erstrecken



definiert als Grenzwert $\displaystyle\int_a^{\infty} dx \, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx \, f(x)$

muss nicht existieren! ($F \to \infty$ möglich)

Beispiele: $\lambda > 0$

- $\int_0^\infty dx\; e^{-\lambda x} = \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{\lambda}$

- $\int_0^\infty dx \left\{ \ln(1+e^x) - x \right\} < \infty$? untersuche Integrand für $x \to \infty$

$$\{\ldots\} = \ln(1+e^x) - x = \ln\left[e^x(e^{-x}+1)\right] - x$$

$$= \ln e^x + \ln(\underbrace{e^{-x}}_{z \text{ klein}}+1) - x = x + \ln(1+z) - x$$

$$= z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 \mp \ldots = e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x} \mp \ldots \xrightarrow[x\to\infty]{\text{exp}} 0$$

$\rightsquigarrow \int$ existiert ✓

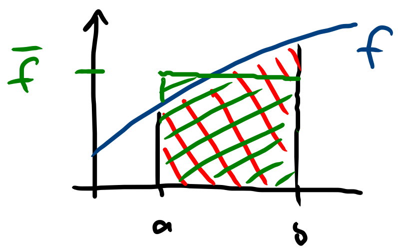
VI.2 Beispiele

a) Mittelung

Grenzwert des arithmetische Mittels auf kontinuierliche Mengen

$$\bar f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_n f_n = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_n f_n \cdot dx}{N\cdot dx} = \frac{\int_a^b dx\, f(x)}{b-a} \qquad (6.3)$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f(x)^2 \neq \bar f^{\,2} = \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right)^2$$



$$\overline{f+g} = \bar f + \bar g\,, \quad \overline{\alpha f} = \alpha\cdot\bar f\,, \quad \bar 1 = 1\,, \quad \bar{\bar f} = \bar f$$

Schwankung:

$$\Delta f := \sqrt{\overline{(f-\bar f)^2}} = \sqrt{\overline{f^2 - 2f\bar f + \bar f^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - \bar f^{\,2}} \qquad (6.4)$$

Bsp.: harmonischer Oszillator $\quad x(t) = A\cos\omega t\,, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\bar x = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A\cos\omega t = 0\,, \qquad (\Delta x)^2 = \overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}A^2$$

$$\bar V = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{\kappa}{2}x^2 = \frac{\kappa}{4}A^2$$ potenzielle Energie

gleich

$m\omega^2 = \kappa$

$$\bar T = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{m}{2}\dot x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{m}{2}(-A\omega\sin\omega t)^2 = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\kappa}{4}A^2$$ kinetische Energie

b) lineare Massenverteilung

$m_i \quad i=1,\ldots,N \xrightarrow[N\to\infty]{} \sigma(x) \quad x \in [0,L]$ Massendichte $[\mathrm{kg}/\mathrm{m}]$

$\to \sigma(x)\,dx$ Masse zwischen x und $x+dx$

$\to M = \sum_{i=1}^{N} m_i \xrightarrow[N\to\infty]{} M = \int_0^L dx\, \sigma(x)$ Gesamtmasse

Beispiele:

Schwerpunkt

$$R_s = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \xrightarrow[N\to\infty]{} R_s = \bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^L dx\,\sigma(x)\,x \qquad (6.5)$$

erstes „Moment"

Trägheitsmoment um $x=0$:

$$I = \sum_i m_i x_i^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} I = M\,\overline{x^2} = \int_0^L dx\,\sigma(x)\,x^2 \qquad (6.6)$$

zweites

c) Überlagerung

zwei Kraftfelder $\vec{F}_{(1)}$ & $\vec{F}_{(2)}$ $\leadsto$ Summe $\vec{F} = \vec{F}_{(1)} + \vec{F}_{(2)}$

seien konservativ $\vec{F}_{(i)}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_{(i)}(\vec{r})$ $\quad i = 1,2$

$\leadsto$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ mit $V = V_{(1)} + V_{(2)}$

Bsp.: Gravitationspotenzial einer linearen Massenverteilung

<u>eine</u> Masse $(M_0, \vec{r}_0)$: $\quad V(\vec{r}) = -\dfrac{\gamma m M_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

<u>viele</u> Massen $(M_i, \vec{r}_i)$: $\quad V(\vec{r}) = -\gamma m \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$
(N)

<u>kontinuierliche</u> Massenverteilung ($\sigma(x')$ entlang $x' \in [0, L]$):

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{|\vec{r} - \vec{r}(x')|} \underset{\substack{\vec{r} \doteq (x,y,z) \\ \vec{r}(x') \doteq (x',0,0)}}{=} -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}} \qquad (6.7)$$

VI.3 Integrationsmethoden

a) Partialbruch-Zerlegung

Beispiel: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2}$ mit A, B Polynome in x

finde A, B: $1 = A\cdot(1+x^2) + B\cdot x = A + x(B + Ax)$

$\rightsquigarrow$ $A = 1$, $B = -x$ d.h. $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

b) Partielle Integration nutze Produktregel

$f = u\cdot v \rightsquigarrow f' = u'\cdot v + u\cdot v' \rightsquigarrow \int_a^b dx\,(u\cdot v)' = [u\cdot v]\Big|_a^b = \int_a^b dx\, u'\cdot v + \int_a^b dx\, u\cdot v'$

$$\rightsquigarrow \int_a^b dx\, u'\cdot v = [u\cdot v]\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u\cdot v' \qquad (6.8)$$

Beispiel: $\int_0^y dx \ln x = \int_0^y dx\, \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v} = [x\cdot\ln x]_0^y - \int_0^y \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{1} = y\ln y - y$

$u = x$, $v' = 1/x$

c) Substitution = Wechsel der Integrationsvariablen

$$I = \int_a^b dx \; f(x)$$

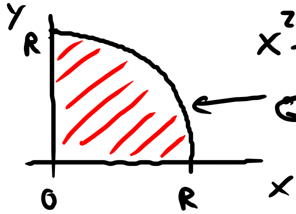
Substitution: $\begin{cases} x \rightarrow t \\ x = x(t) \quad \leftrightarrow \quad t = t(x) \\ dx = \frac{dx}{dt} dt = dt \; \dot{x}(t) \end{cases}$

$$I = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \; \dot{x}(t) \underbrace{f(x(t))}_{\text{neue Fktn. } g(t)} = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \; \dot{x}(t) \; g(t) \qquad (6.9)$$

Grenzen: $x=a$ und $x=b$ $\Leftrightarrow$ $t(a)$ und $t(b)$

Vorsicht; wenn $x(t)$ nicht monoton!

Beispiel: Kreisfläche



$$F_\odot = 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2-x^2}$$

Substitution: $x \rightarrow \varphi$

$x = R \sin\varphi$

$dx = R \cos\varphi \, d\varphi$

$[0, R] \rightarrow [0, \pi/2]$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; R\cos\varphi \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\varphi}$$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; \cos\varphi \sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; \cos^2\varphi$$

$$= 4R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi R^2 \quad \checkmark$$

d) Differenzieren nach Parameter

Beispiel: (n=0,1,2,...)

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = \int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x}\Big|_{\alpha=1}$$

$$= \left[\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}}_{1/\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=1} = \left[\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=1}$$

$$= n!\,\alpha^{-(n+1)}\Big|_{\alpha=1} = n!$$

e) Parameter-Abhängigkeit

... falls nur Abhängigkeit von einem Parameter gesucht...

Beispiel: T-Abhängigkeit der Energie E eines Hohlraumstrahlers

$$E = \frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{(\hbar c)^3}\,\frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T}+1} \overset{\varepsilon=T\cdot x}{=} \frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{T\,dx}{(\hbar c)^3}\,\frac{(Tx)^3}{e^x+1} = \frac{V\cdot T^4}{(\hbar c)^3\,\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx\, x^3}{e^x+1} \sim T^4$$

f) Reihenentwicklung eines Integranden

Beispiel: $$\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x+1} = \int_0^\infty dx\,\frac{x^3 e^{-x}}{\underbrace{1+e^{-x}}_{1-e^{-x}+(e^{-x})^2-\dots}} = \;\; = 6\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^4} = 6\cdot\frac{7\pi^4}{720}$$

entwickeln in Potenzreihe
gliedweise integrieren
$\int_0^\infty dx\; x^3\,(e^{-x})^n$

Bemerkung: Hauptsatz als Substitution

$$I = \int_a^b dx \; f(x)$$

Stammfunktion

Substitution: $x = x(t)$ mit $t = F$ so dass $\frac{dF}{dx} = f$

$$\rightsquigarrow \quad dx = \frac{dx}{dF}\, dF \iff \dot{x} = \frac{dx}{dF} = \frac{1}{f}$$

$$\rightsquigarrow \quad I = \int_{F(a)}^{F(b)} dF \cdot \underbrace{\frac{dx}{dF}}_{= 1/f} \; \underbrace{f(x(F))}_{= f} = \int_{F(a)}^{F(b)} dF \cdot 1 = F(b) - F(a)$$

VI.4 Kurven, Volumen, Flächen

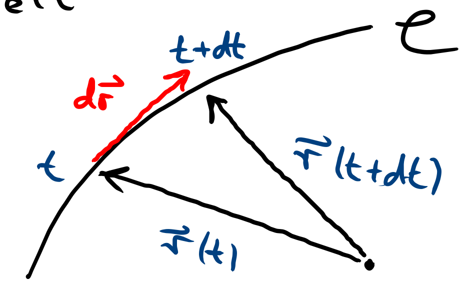
Verallgemeinerungen, die sich auf gewöhnliche Integrale reduzieren lassen

a) Vektor - Integrand z. B. $\int dt\, \vec{F}(t) = \vec{p}$

$$\int_a^b dx\ \vec{f}(x) \doteq \int_a^b dx\ \left(f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x),\ \int_a^b dx\, f_2(x),\ \int_a^b dx\, f_3(x)\right)$$

b) Kurven- oder Weg-Integral

Beiträge werden entlang einer Kurve aufgesammelt



Kurve $\mathcal{C}$, parametrisiert durch

$\rightsquigarrow\ \vec{r}(t)$ $\qquad t \in [t_1, t_2]$

im Zeitraum $[t, t+dt]$ ändert sich $\vec{r}$ um

$$\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)\, dt = d\vec{r}(t)$$

$(dx)^2 \neq d(x^2) = 2x\,dx$

Länge des Verschiebevektors $d\vec{r} \doteq (dx, dy, dz)$

$$ds := |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \overset{\cdot \frac{dt}{dt}}{=} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = v(t)\, dt \qquad (6.10)$$

$v = |\dot{\vec{r}}|$

$$\Longrightarrow \int_{\mathcal{C}} ds\ f(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt\ v(t)\ f(\vec{r}(t)) \qquad (6.11)$$

$f(\vec{r}(t)) =: g(t)$

Beispiele:

• Länge von $\mathcal{C}$: $$L = \int_{\mathcal{C}} ds\; 1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\; v(t) \quad \text{mit} \quad v = |\dot{\vec r}| = \sqrt{\dot{\vec r}^{\,2}}$$

Notation: bei geschlossenen $\mathcal{C}$

$$\oint_{\mathcal{C}} ds\; f(\vec r)$$

• Masse eines Drahts: $$M = \int_{\mathcal{C}} ds\; \sigma(\vec r) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; v(t)\; \sigma(\vec r(t))$$

• Gravitationspotenzial eines Drahtes: $$V(\vec r) = -\gamma m \int_{\mathcal{C}} ds\; \frac{\sigma(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} = -\gamma m \int_{t_1}^{t_2} dt\; \frac{|\dot{\vec r}\,'(t)|\;\sigma(\vec r\,'(t))}{|\vec r - \vec r\,'(t)|}$$

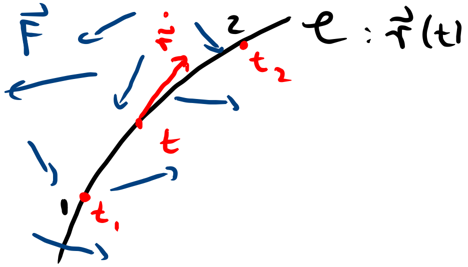
(6.12)

• Arbeit längs $\mathcal{C}$: $$W = \int_{\mathcal{C}} ds\; F_{\parallel}(\vec r) = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{|d\vec r|\; \overset{\text{Tangenteneinheitsvektor}}{\vec t(\vec r)}}\cdot \vec F(\vec r) = \int_{\mathcal{C}} d\vec r \cdot \vec F(\vec r)$$

$v\vec t = \dot{\vec r}$ $\times\, dt/dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\; v(t)\; F_{\parallel}(\vec r(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \dot{\vec r}(t) \cdot \vec F(\vec r(t))$$

(6.13)



für konservative $\vec F = -\vec\nabla V$: $$\dot{\vec r} \cdot \vec F(\vec r) = -\dot{\vec r} \cdot \vec\nabla V(\vec r) = -\partial_t V(\vec r(t))$$

$$\rightsquigarrow \quad W = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \big(-\partial_t V(\vec r(t))\big) = V(\vec r(t_1)) - V(\vec r(t_2)) = V(1) - V(2)$$

unabhängig von $\mathcal{C}$

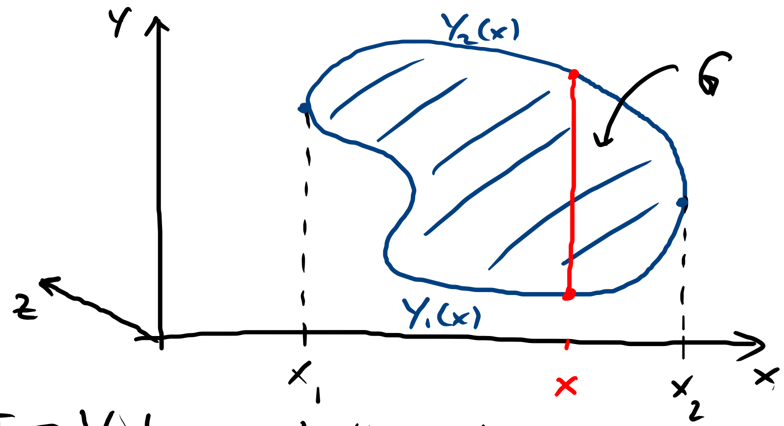
(6.14)

c) Ebenes Flächenintegral

Sammele Integranden $f(x,y)$ auf einem Gebiet $(x,y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$

erst $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, f(x,y) =: F(x)$ für jedes feste $x \in [x_1, x_2]$

dann $\int_{x_1}^{x_2} dx\, F(x) = I$, d.h.



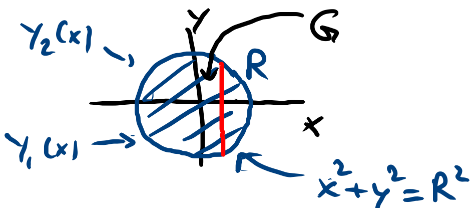
$$I = \int_G d^2r\, f(x,y) := \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, f(x,y)$$

I = Volumeninhalt unter Graphen $z = f(x,y)$

(6.15)

Beispiele:

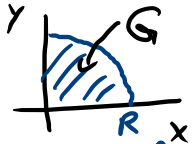
- Flächeninhalt einer Kreisscheibe



$f(x,y) = 1$

$$F = \int_G d^2r\, 1 = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy\, 1 = \int_{-R}^{R} dx\, 2\sqrt{R^2-x^2} \underset{\substack{x = R\sin t \\ dx = R\cos t\, dt}}{=} 2\,\frac{\pi}{2} R^2 = \pi R^2 \checkmark$$

- Volumen einer Kugel $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2} = z$



$$V = 8 \int_G d^2r\, \sqrt{R^2-x^2-y^2} = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\, \sqrt{R^2-x^2-y^2} \underset{\substack{y = \sqrt{R^2-x^2}\,\sin\phi \\ dy = \sqrt{R^2-x^2}\,\cos\phi\, d\phi}}{=} 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^R dx\, (R^2-x^2) = \frac{4\pi}{3} R^3 \checkmark$$

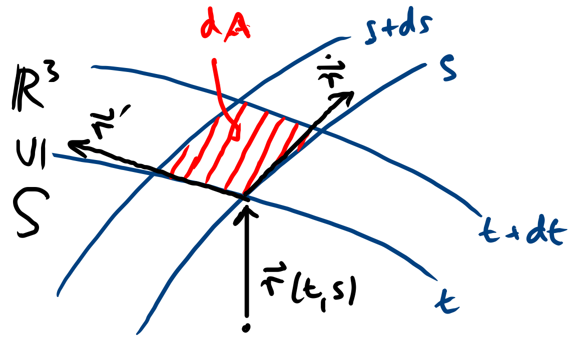
d) Oberflächenintegral

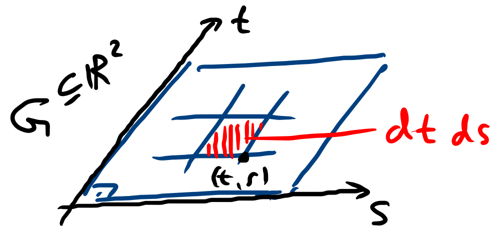
Beiträge zu einem 2-dimensionalen Integral können entlang einer <u>beliebigen</u> Fläche im $\mathbb{R}^3$ aufgesammelt werden

Oberfläche S, parametrisiere als $\vec{r}(t,s) \in \mathbb{R}^3$

$\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad \vec{r}\,' \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$

Koordinaten $(t,s) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$





zum Bereich $[t, t+ds] \times [s, s+ds]$ gehört infinitesimale Fläche dA gegeben durch Länge des Normalenvektor $d\vec{A}$

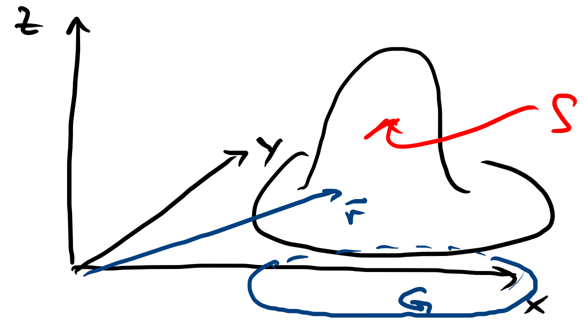
$$d\vec{A} = [\vec{r}(t+dt,s) - \vec{r}(t,s)] \times [\vec{r}(t,s+ds) - \vec{r}(t,s)]$$
$$= \dot{\vec{r}}(t,s) \times \vec{r}\,'(t,s)\; dt\, ds \;=:\; \vec{n}\; dA \qquad (6.16)$$

also:

$$dA = |d\vec{A}| = |\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'|\; dt\, ds \;, \qquad \vec{n} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'}{|\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'|} \qquad (6.16')$$

Integral: $$\int_S dA\, f(\vec{r}) := \int_G dt\, ds\; |\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'|(t,s)\; f(\vec{r}(t,s)) \qquad (6.17)$$

Beispiel: Masse eines Hutes S



parametrisiere durch Projektion in xy-Ebene

$$(t,s) = (x,y)$$

$$\vec{r}(x,y) \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix} \qquad (x,y) \in G$$

Massendichte $\sigma(\vec{r})$

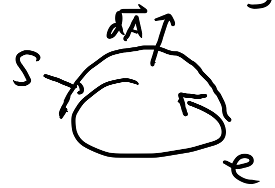
$$M = \int_S dA\, \sigma(\vec{r}) = \int_G d^2r\, |\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'|\, \underbrace{\sigma(\vec{r}(x,y))}_{f(x,y)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h \end{pmatrix} \right\| \cdot f(x,y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \sqrt{1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2}\; f(x,y)$$

Orientierung: Vorzeichenwahl von $d\vec{A}$ ist Konvention

- S ohne Rand, aber orientiert $\longrightarrow$ $d\vec{A}$ zeige nach außen. Notation: $\oint_S dA$
- S mit Rand (notwendig geschlossen) $\longrightarrow$ Rechte-Hand-Regel:



Beispiel: Strom I durch eine Fläche S

vektorielle Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$

Normaleneinheitsvektor

nur die zur Fläche senkrechte Komponente $j_n = \vec{j}\cdot\vec{n}$ trägt zu I bei:

$$I = \int_S dA\; j_n(\vec{r}) = \int_S \underbrace{dA\;\vec{n}}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = \int_S d\vec{A}\cdot\vec{j}(\vec{r}) \qquad (6.18)$$

$$= \int_G dt\, ds\; (\dot{\vec{r}}\times\vec{r}\,')\cdot\vec{j}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t,s)}$$

e) Volumenintegral

$$I = \int_V d^3r\; f(\vec{r}) := \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\; f(x,y,z) \qquad (6.19)$$

VI.5 Krummlinige Koordinaten

Zunächst im flachen Raum, zweidimensional

Beispiel: Polarkoordinaten $(x, y) \longmapsto (r, \varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan y/x \end{array}\right.$$

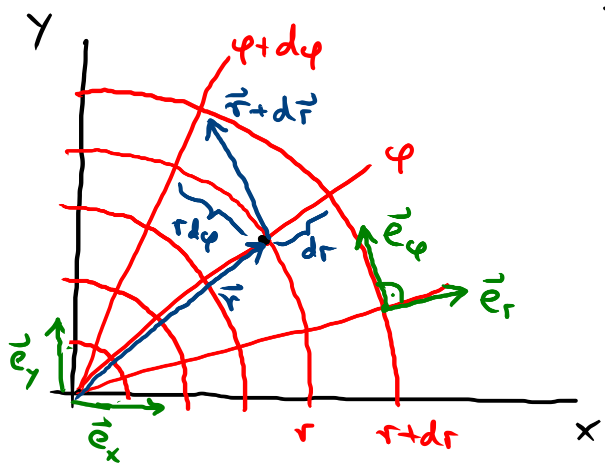
$$\vec{r}(r,\varphi) \doteq \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \doteq \vec{r}(x,y)$$

neue Basisvektoren:

$$\partial_r \vec{r} \doteq \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \doteq \vec{e}_r\, b_r \quad \rightsquigarrow \quad b_r = 1$$

$$\partial_\varphi \vec{r} \doteq r \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \doteq \vec{e}_\varphi\, b_\varphi \quad \rightsquigarrow \quad b_\varphi = r$$

$$c_{r\varphi} := \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \qquad \text{hier: } c_{r\varphi} = 0$$



$\partial_x \vec{r} = \vec{e}_x$
$\partial_y \vec{r} = \vec{e}_y$

Vorsicht: $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y \neq \vec{e}_r r + \vec{e}_\varphi \varphi$

statt $\vec{r}$ studiert man besser Änderungen $d\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ etc.

$$d\vec{r} = \partial_x \vec{r}\, dx + \partial_y \vec{r}\, dy = \vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy \quad \leftsquigarrow \vec{r}(x,y)$$

$$\overset{\text{oder}}{=} \partial_r \vec{r}\, dr + \partial_\varphi \vec{r}\, d\varphi = \vec{e}_r\, dr + \vec{e}_\varphi\, r\, d\varphi \quad \leftsquigarrow \vec{r}(r,\varphi)$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dr - rs\,d\varphi \\ s\,dr + rc\,d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} =: J \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} \qquad (6.21)$$

Funktional- oder Jacobi-Matrix

teile durch dt für Kurven:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\varphi r \dot{\varphi} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \qquad (6.21')$$

$$v^2(t) = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

„quadratisches Differential" (symmetrisch)

Linienelement: $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2$

$$\overset{\frac{dt^2}{dt^2}}{=} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} (dt)^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)(dt)^2 = v^2 (dt)^2 \qquad (6.22)$$

Flächenelement: $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\varphi \qquad (6.23)$

„Dachprodukt" (antisymmetrisch): $dr \wedge d\varphi$

Anwendungen:

- Kugelvolumen: $V = 8 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r \underbrace{\sqrt{R^2 - r^2}}_{\text{Höhe}} = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R dr \left(-\frac{1}{3}\right) \partial_r (R^2 - r^2)^{3/2} = \frac{4\pi}{3} R^3$

- Gauß-Integral: $I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} d^2r\, e^{-r^2/a^2} \overset{r \to r \cdot a}{=} a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2}$

$$= a^2\, 2\pi \int_0^\infty dr \left(-\frac{1}{2}\right) \partial_r e^{-r^2} = \pi a^2 \qquad (6.24)$$

allgemeine Situation:

krummlinige Koordinaten im $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (u,v)$

$$\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$ [nicht $\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ schreiben!]

- Basisvektoren:

$$\partial_u \vec{r} = \vec{e}_u b_u \quad , \quad \partial_v \vec{r} = \vec{e}_v b_v \qquad \text{so dass} \begin{cases} \vec{e}_u^{\,2} = \vec{e}_v^{\,2} = 1 \\ \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = c_{uv} \end{cases}$$

d.h. $$b_u(u,v) = |\partial_u \vec{r}| \quad , \quad b_v(u,v) = |\partial_v \vec{r}| \qquad (6.25)$$

- Differential: $$d\vec{r} = \partial_u \vec{r}\, du + \partial_v \vec{r}\, dv$$
$$= \vec{e}_u b_u\, du + \vec{e}_v b_v\, dv$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x\, du + \partial_v x\, dv \\ \partial_u y\, du + \partial_v y\, dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =: J \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \qquad (6.26)$$

$\hookrightarrow (dx \;\; dy) = (du \;\; dv) \cdot J^T$

analog: $$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

Linienelement^2:

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx \;\; dy) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (du \;\; dv)\, J^T J \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \qquad (6.27)$$

oder
$$= (\partial_u \vec{r}\, du + \partial_v \vec{r}\, dv)^2 = (du \;\; dv) \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =: (du \;\; dv)\, G \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

induzierte Metrik:

$$G = \begin{pmatrix} \partial_u\vec r\cdot\partial_u\vec r & \partial_u\vec r\cdot\partial_v\vec r \\ \partial_v\vec r\cdot\partial_u\vec r & \partial_v\vec r\cdot\partial_v\vec r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_u^2 & b_u b_v c_{uv} \\ b_u b_v c_{uv} & b_v^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} \qquad g_{uv} = g_{vu}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} = J^T \cdot J \qquad (6.27')$$

also

$$(ds)^2 = g_{uu}(du)^2 + 2g_{uv}\,du\,dv + g_{vv}(dv)^2 = g_{ij}\,du_i\,du_j$$

mit $\quad i,j \in \{u,v\} = \{u_1,u_2\} \quad$ und $\quad g_{ij} = \partial_i\vec r\cdot\partial_j\vec r$

Kurven im $\mathbb{R}^2$: $\vec r(t) \rightsquigarrow (x(t), y(t)) \rightsquigarrow (u(t), v(t)) \rightsquigarrow du_i = \dot u_i(t)\,dt$

$$ds = \sqrt{g_{ij}\,du_i\,du_j} = \sqrt{g_{ij}\,\dot u_i\,\dot u_j}\;dt = v(t)\,dt \quad \text{mit} \quad v^2 = (\dot u\;\dot v)\,G\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix} \qquad (6.28)$$

wichtige Kurvenintegrale:

Bogenlänge: $\quad s(1,2) = \int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt\; v(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{g_{ij}(t)\,\dot u_i\,\dot u_j} \qquad (6.29)$

Wirkung: $\quad W(1,2) = \int_1^2 \vec p\cdot d\vec r = m\int_1^2 \dot{\vec r}\cdot d\vec r = m\int_{t_1}^{t_2} dt\;\dot{\vec r}^{\,2} = m\int_{t_1}^{t_2} dt\; g_{ij}(t)\,\dot u_i\,\dot u_j$

(6.30)

- Flächenelement:

lese $\vec{r}(u,v) \doteq \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v)=0 \end{pmatrix}$ wie Oberfläche im $\mathbb{R}^3$, nur mit $z=0$ und (u,v) statt (t,s)

$$dA = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}|\, du\, dv = \sqrt{(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})^2}\, du\, dv$$

$$= \sqrt{(\partial_u \vec{r})^2 (\partial_v \vec{r})^2 - (\partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r})^2}\, du\, dv$$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix}}\, du\, dv = \sqrt{\det G}\, du\, dv$$

$$= \sqrt{\det (J^T J)}\, du\, dv = \sqrt{(\det J^T)(\det J)}\, du\, dv = |\det J|\, du\, dv \qquad (6.31)$$

das heißt:

$$dx\, dy = |\det J|\, du\, dv = \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J$$

Substitutionsregel:

$$\int_G dx\, dy\, f(x,y) = \int_{\tilde{G}} du\, dv \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| f(x(u,v), y(u,v)) \qquad (6.32)$$

- Beispiel Polarkoordinaten: $(x,y) \longmapsto (r,\varphi)$ $\quad \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right.$

$$J = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \qquad J^T = \begin{pmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{pmatrix} \qquad G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$|\det J| = \sqrt{\det G} = r \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\varphi \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

- Verkettung $(x,y) \longmapsto (u,v) \longmapsto (t,s)$

$$\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \cdot \left| \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} \right| = \left| \det \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} \right) \right|$$

$$\overset{\text{rechne}}{\underset{\text{nach}}{=}} \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} \right|$$

- Erweiterung auf 3 Dimensionen

$(x,y,z) \longmapsto (u,v,w)$ $\qquad\qquad$ $\vec{r}(u,v,w)$

alles analog zu 2 Dimensionen: J, G sind 3×3 Matrizen

Linienelement entsprechend

Volumenelement

$$dV = dx\,dy\,dz = \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

$$= \left| (\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}) \cdot \partial_w \vec{r} \right| du\,dv\,dw \qquad (6.33)$$

Oberflächenelement: Einbettung einer Fläche S im $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ hatten wir schon: $\vec{r}(t,s)$ $\qquad \nexists\, J$

$$dA = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}|\, du\,dv = \sqrt{\det G}\, du\,dv \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$$

· Beispiel: Kugelkoordinaten $(x,y,z) \longmapsto (r, \vartheta, \varphi)$ with $r \in [0,\infty)$, $\vartheta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} =: r \begin{pmatrix} S\, c \\ S\, s \\ C \end{pmatrix} = \underline{r}$$

$$\partial_r \vec{r} \doteq \begin{pmatrix} S c \\ S s \\ C \end{pmatrix}, \quad \partial_\vartheta \vec{r} \doteq r \begin{pmatrix} C c \\ C s \\ -S \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \vec{r} \doteq r \begin{pmatrix} -S s \\ S c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_r = 1 \qquad b_\vartheta = r \qquad b_\varphi = r \sin\vartheta$$

alle orthogonal

$$J = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \partial_r \underline{r} & \partial_\vartheta \underline{r} & \partial_\varphi \underline{r} \\ | & | & | \end{pmatrix} \rightsquigarrow J^T J = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (ds)^2 &= (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, (d\varphi)^2 \\ \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2 \\ |\det J| &= \sqrt{\det G} = r^2 \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (6.34)$$

$$dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = -r^2 dr\, d(\cos\vartheta)\, d\varphi =: r^2 dr\, \underbrace{d\Omega}_{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi} \quad (6.35)$$

Anwendungen

- Kugeloberfläche S^2_R $\qquad r = R = \text{const.}$

$$dA = \left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R} = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \qquad G:\ \underbrace{[0,\pi]}_{\vartheta} \times \underbrace{[0,2\pi)}_{\varphi}$$

$$A_R = \int_{S^2_R} dA = \int_G R^2 \overbrace{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}^{d\Omega = dA|_{R=1}} = R^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

- Kugelvolumen B^3_R $\qquad r \in [0,R] \qquad$ sowie $\qquad (\vartheta,\varphi) \in S^2_{(R=1)}$

$$V_R = \int_{B^3_R} dV = \int_0^R dr\, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} = 4\pi \left.\frac{1}{3} r^3\right|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3$$

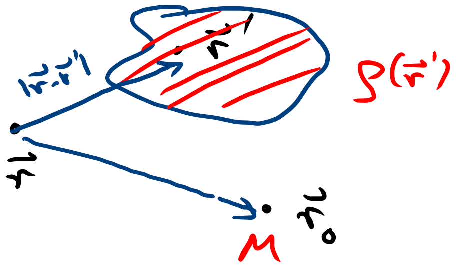
VI.6 Delta-Distribution

Beschreibung von Massen- oder Ladungsdichten von Objekten, die nicht 3-dimensional sind

Beispiel: Gravitationspotential eines Massepunktes M bei $\vec r_0$

$$V(\vec r) = -\gamma m \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} = -\gamma m \, \frac{M}{|\vec r - \vec r_0|}$$

Testmasse



wie muss $\rho(\vec r\,')$ beschaffen sein, damit das stimmt?

notwendig: $\rho(\vec r\,') = 0$ für $\vec r\,' \neq \vec r_0$ konzentriert

$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\vec r\,') = M$ Gesamtmasse

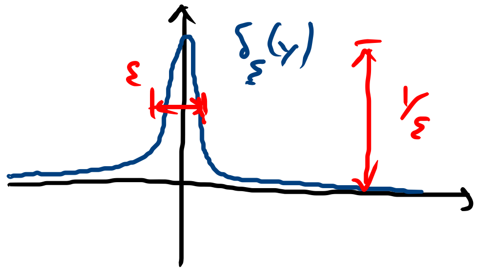
Vereinfache Diskussion auf eine Dimension

gesucht ist „Funktion" $\rho(x)$ mit

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \forall x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \rho(x) = 1 & \end{cases}$$

$\nexists$ solche Funktion, aber näherungsweise

$$\rho_\varepsilon(x) =: \delta_\varepsilon(x-x_0)$$



Grenzwert $\varepsilon \to 0$ existiert nicht als Funktion

aber „verallgemeinerte Funktion", sog. „Distribution" $\delta_0(x-x_0) =: \delta(x-x_0)$

wird nur unter einem Integral gebraucht

Definition: $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \delta(x-x_0)\, t(x) = t(x_0) \qquad (6.36)$$

für alle „vernünftigen" Funktionen t: „δ erschlägt Integral"

heißen Testfunktionen, verschwinden genügend schnell für $|x| \to \infty$

verschiedene Darstellungen von δ_ε:

- $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Kastenfunktion
- $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$ Gaußfunktion
- $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ Lorentzkurve

(6.37)

Eigenschaften: (6.38)

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-x_0) = 1$

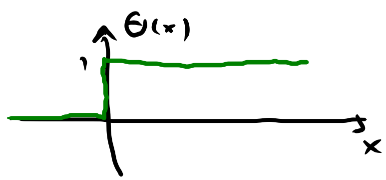
(ii) $\int_a^b dx\, \delta(x-x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0) & x_0 = a \text{ oder } x_0 = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(iii) $\delta(-x) = \delta(x)$

(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta'(x-x_0) f(x) = -f'(x_0)$

(v) $\Theta'(x) = \delta(x)$ mit $\Theta(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x<0 \\ 1/2 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} x + 1)$

Heaviside- oder Stufenfunktion



(vi) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ $[\, d(ax) = a \cdot dx \,]$

(vii) $\delta(h(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|h'(x_n)|}$ mit $h(x_n) = 0$, $h'(x_n) \neq 0$

(viii) $\dim[\delta(x)] = -\dim[x]$

von einer Dimension zurück nach drei Dimensionen

- in kartesischen Koordinaten

$\delta(x)$ reduziert $\int d^3r \longrightarrow \int dy \int dz$ $\quad$ yz-Ebene

$\delta(x)\,\delta(y)$ —— " ——→ $\int dz$ $\quad$ z-Achse

$\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ —— " ——→ Punkt $\vec{r} = 0$

„Träger"

allgemeiner $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ für punktförmigen Träger bei $\vec{r}_0$

Eigenschaft:
$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \; \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \qquad (6.39)$$

- in krummlinigen Koordinaten

$\vec{r}: (x,y,z) \longrightarrow (u,v,w)$

$\vec{r}_0: (x_0,y_0,z_0) \longrightarrow (u_0,v_0,w_0)$

$$f(x_0,y_0,z_0) = \int_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,dz\; f(x,y,z)\, \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}_{\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)}$$

$$= \int du\,dv\,dw\; \underbrace{f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))}_{=:\, g(u,v,w)} \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

aber auch
$$g(u_0,v_0,w_0) = \int du\,dv\,dw\; g(u,v,w)\,\delta(u-u_0)\,\delta(v-v_0)\,\delta(w-w_0)$$

beides ist gleich $\Longrightarrow$
$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(u-u_0)\,\delta(v-v_0)\,\delta(w-w_0) \Big/ \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \qquad (6.40)$$

Bsp. 2d Polar
zentriert um $\vec{r}_0$
$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r}\,\delta(r)\,\delta(\varphi)$$