Zahlen, Vektoren, Matrizen

[R1] *Gleichungen*

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

(a) $(x-3)(x+2)=0$

(b) $-2\lambda^2-3\lambda+2=0$

(c) $x^2-2x+\pi=0$

(d) $5\lambda^2+3\lambda+1=0$

(e) $-\lambda^2+2\lambda-8=0$

(f) $z^n=1$ wobei $n\in\mathbb{N}$

(g) $z^4+z^2+1=0$

(h) $\frac{1}{2}(z+z^*)=1$

[R2] *Vektoren*

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\2\\\sqrt{7}\end{pmatrix}, \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \vec{v}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

(a) Normiere alle Vektoren.

(b) Welchen Winkel schließen die Vektoren jeweils miteinander ein?

(c) Berechne die Kreuzprodukte der Vektoren.

(d) Zerlege die Vektoren in ihre Anteile parallel und senkrecht zu $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

[R3] *Matrizen*

Berechne jeweils Determinante und Spur der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix}1&2\\-3&-1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}0&\pi&1+\mathrm{i}\\-2&1&3\\-\mathrm{i}&3&0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1&0&x\\-2&0&\sqrt{3}\\1&2&4\end{pmatrix}$

(d*) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

[R4] *Eigenwerte und Eigenvektoren*

(a) Berechne die Determinante, die Spur, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gib außerdem die Drehmatrix R an, für die $R^\top MR$ diagonal wird. Berechne außerdem das Produkt und die Summe aller Eigenwerte. Welcher Zusammenhang wird deutlich? Beweise diesen. Leite ihn explizit nocheinmal für ein allgemeine 2×2 Matrix her.

(b) Berechne die Determinante, die Spur, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[R5] *Index Notation*

(a) Schreibe $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in Index notation ($\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$).

(b) Beweise (benutze Eigenschaften von ϵ_{ijk}) in Index notation, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(c) Beweise (benutze Eigenschaften von ϵ_{ijk}) in Index notation, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c \times \vec{a}}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

(d) Beweise (benutze Eigenschaften von ϵ_{ijk}), dass $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$