Übung II zum Repetitorium zu Mathematische Methoden der Physik
Ableitungen, Integration, Taylorentwicklung — WiSe 2022/23
07.03.2023

Ableitungen, Integration, Taylorentwicklung

[R6] *Ableitungen*

Berechne die folgenden Ableitungen:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin(2x)\,\mathrm{e}^{3x^2}\right)$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ für $f(x,y) = x^2 + 3xy - \ln(y+x)$

(c) $\dot{g}(t)$ für $g(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\mathrm{e}^{\lambda t}}$

(d) $\operatorname{arsinh}'(x)$, wobei arsinh die Umkehrfunktion von sinh ist.
Erinnerung: Es ist $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}), \sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

[R7] *Schraubenbahn*

Bestimme Geschwindigkeit und Beschleunigung der Schraubenbahn

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechne außerdem den Drehimpuls, der definiert ist als $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$.

[R8] *Mehrdimensionale Ableitungen*

(a) Berechne den Gradienten der Funktion $f(\vec{r}) = \tan(1+x)y - 2 + \frac{\sqrt{y}}{1+\mathrm{e}^z}$.

(b) Berechne die Jacobi-Matrix von $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2\sin(z) \\ -\mathrm{e}^{3y}/z + \sinh x \\ az + b/x \end{pmatrix}$.

[R9] *Taylorentwicklung*

(a) Bestimme den Abstand r_{min}, bei dem das Morse-Potential

$$V(r) = D_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(r-r_0)}\right)^2$$

sein Minimum hat, und entwickle das Potential bis einschließlich zur zweiten Ordnung um sein Minimum, d. h. an der Stelle r_{min}.

(b) Das Yukawa-Potential beschreibt in gewissen Energiebereichen die starke Wechselwirkung. Es hat die Form $V(r) = -\gamma\frac{\mathrm{e}^{-\lambda r}}{r}$. Der Parameter γ gibt die Stärke der Wechselwirkung an, λ ist (in geeigneten Einheiten) die Masse des Pions. Berechne die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ und entwickle sie bis zur zweiten Ordnung in λ um den Wert $\lambda = 0$.

Tipp: Erinnere dich an die Gleichung für einen Gradienten der Form $\vec{\nabla}f(r)$*!*

[R10] *Integrale*

Berechne die folgenden Integrale. Du brauchst partielle Integration und/oder Integration durch Substitution!

(a) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, x \ln x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 \sqrt{2x^3 + 4}$

(c) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, x^2 \cos^2 x$ *(Tipp:* $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ *hilft!)*

(d) $\displaystyle\int_0^c \mathrm{d}x\, \frac{x^2}{a + x}$

(e) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2}$

[R11] *Linienintegral*

γ sei der Halbkreis um den Ursprung, der in der oberen Halbebene ($y > 0$) von $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$ führt. Berechne das Linienintegral

$$\int_\gamma \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V}(\vec{r})$$

des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -x \end{pmatrix}$ über diesen Halbkreis.

Tipp: Auch hier hilft $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.