Exercitium I zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2022/23

Vektoren, Beträge und Skalarprodukt — Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld

Abgabe bis 12:00 am 25.10.2022 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

VEKTOREN, BETRÄGE UND SKALARPRODUKT

Bei diesen Aufgaben geht es darum, physikalische Probleme mit Hilfe der Vektorrechnung zu lösen. Dabei treten auch Skalarprodukte auf.

[H1] *Segelflug* **[12 Punkte]**

Von einem Berggipfel bei $\vec{r}_1$ wird ein kleiner Modell-Segelflieger gestartet. Er segelt mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ und kommt dabei einer Kirchturmspitze im Tal bei $\vec{r}_2$ bedenklich nahe. Welche Position $\vec{r}_2 + \vec{R}$ und welche Distanz R hat er im gefährlichsten Moment? Versuchen Sie, eine Formel für $\vec{R}$ zu finden, die nur die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ enthält. Für eine konkrete Rechnung sei

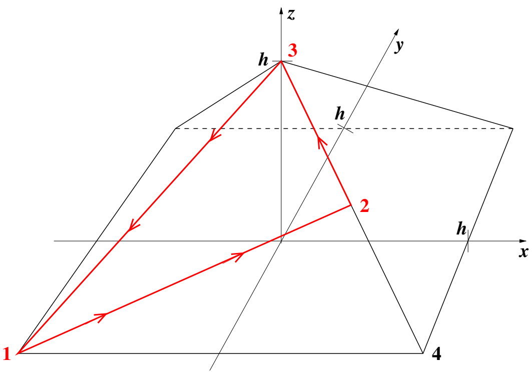
$$\vec{r}_1 \doteq 100 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{m}\,, \qquad \vec{r}_2 \doteq \begin{pmatrix} 900,3 \\ 198,8 \\ -199,6 \end{pmatrix} \mathrm{m}\,, \qquad \vec{v} \doteq \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Hinweis: Am einfachsten geht es durch das Bilden geeigneter Linearkombinationen. Wer das Kreuzprodukt bereits kennt, kann $\vec{R}$ aber auch als ein zweifaches Kreuzprodukt schreiben. Zur Kontrolle: $R = 1{,}3\,\mathrm{m}$.

[H2] *Cheops-Pyramide* **[12 Punkte]**

Ein Tourist erklettert die Cheops-Pyramide, die die Höhe h und eine quadratische Grundfläche mit der Basislänge $2h$ hat.[1] Sein Weg führt ihn von Punkt 1 geradewegs zu dem auf halber Höhe liegenden Punkt 2, von dort zur Spitze[2] bei Punkt 3. Von dort kehrt er direkt zum Anfangspunkt 1 zurück. Bei gleichmäßig $10\,\mathrm{m/min}$ benötigt er für seinen Rundweg 59 Minuten. Wie hoch ist die Pyramide?

Hinweise: Man gebe zunächst die Ortsvektoren $\vec{r}_i$ der drei Punkte $i = 1, 2, 3$ in Komponentendarstellung an, dann $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ usw. Zu Zahlenwerten gehe man so spät wie möglich über. Trigonometrie ist hier weder nützlich noch erlaubt!

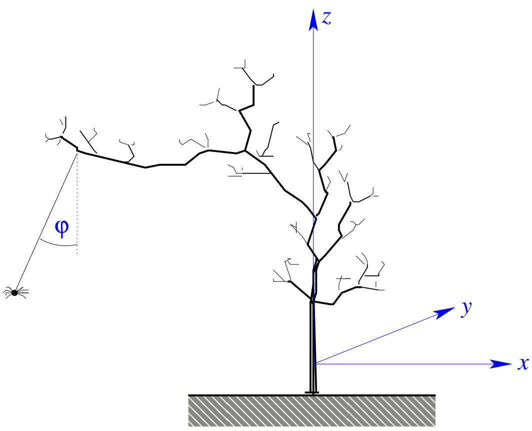


[1] Das stimmt nicht wirklich. Die Cheops-Pyramide hat derzeit eine Basislänge von etwa $\frac{5}{3}h$, aber das macht die Rechnung nur unnötig schwer.

[2] Die Cheops-Pyramide hat keine echte Spitze mehr, sie war ursprünglich etwa $8\,\mathrm{m}$ höher.

[H3] *Spinne im Wind* **[12 Punkte]**

An einem Ast hängt eine Spinne mit der Masse m. An ihr zerrt der Wind mit einer Kraft $\vec{F}$. Die Windrichtung wurde durch Pollen bestimmt, von denen welche erst am Ort $\vec{r}_1 \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dann am Ort $\vec{r}_2 \doteq \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ gesichtet wurden (die z-Achse zeige senkrecht nach oben). Berechnen Sie die Auslenkung φ der Spinne als Funktion von $F/(m\,g)$, mit $F = |\vec{F}|$. Testen Sie Ihr Ergebnis in den Spezialfällen $F = 0$ und $F \to \infty$.



[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: **Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben!** **Lösungen nur als PDF!**