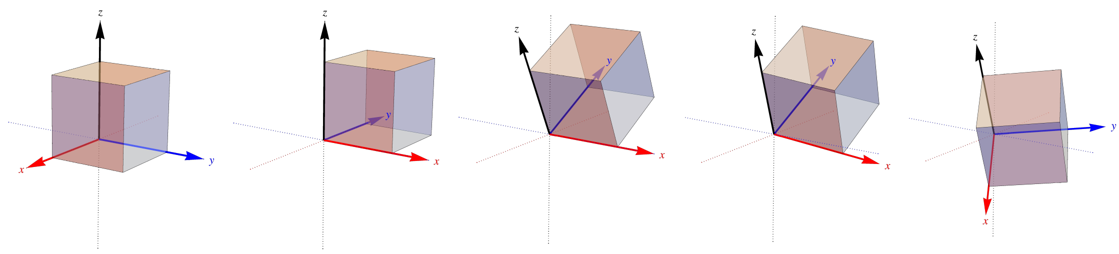
Exercitium VII zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2022/23
Drehungen und Tensoren — Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Abgabe bis 12:00 am 06.12.2022 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

DREHUNGEN UND TENSOREN

[H16] *Total verdreht* **[$4+4+4+4=16$ Punkte]**

Für ein meteorologisches Experiment wurde ein Detektor zur Bestimmung der Windrichtung aufgebaut. Das Gerät eicht seine Richtungsmessung durch Ausrichtung auf den Polarstern, für die es den Vektor $\vec{\eta}$ ermittelt. Bezogen auf das interne Koordinatensystem lautet die Referenzrichtung $\underline{\eta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)^{\mathsf{T}}$. Kurz darauf wird das Gerät durch ein Jahrhundertunwetter mit Tornados mehrfach gedreht.

Der Detektor wird nacheinander (1) um $\pi/2$ um die z-Achse gedreht, dann (2) um α mit $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ um die neue x-Achse gekippt, weiter (3) um β mit $\sin\beta = 1/9$ um die aktuelle y-Achse und schließlich (4) um $\alpha - \pi/2$ um die aktuelle z-Achse rotiert. Dabei war das Gerät mit einer Ecke am Ursprung angekettet und hat sich nicht verschoben.



Als Physiker ordnen wir jeder Drehung (j) eine Matrix $D^{(j)}$ zu und bilden ständig geeignete Produkte.

(a) Welche Matrix D vermittelt von der Start- zur Endposition des Gerätes?
(b) Ist der Test $\det(D) = 1$ erfolgreich?
(c) Bestimmen Sie aus der Matrix D die Komponenten $\underline{n}$ eines Vektors $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$, die unter der Gesamtdrehung nicht geändert werden (das ist die Drehachse), sowie $\cos\phi$ des zugehörigen Winkels ϕ der Gesamtdrehung.
(d) Welche Komponentenvektoren der Richtung $\underline{\eta}, \underline{\eta}^{(1)}, \underline{\eta}^{(2)}, \underline{\eta}^{(3)}$ ergibt die Ortung nach den einzelnen Drehungen?

Hinweise: Zwischenergebnis nach Drehung (3): die resultierende Drehmatrix ist

$$\tilde{D} = D^{(3)}D^{(2)}D^{(1)} = \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 20 & -2 \\ -18 & 0 & 9 \\ 4\sqrt{5} & \sqrt{5} & 8\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nach der letzten Drehung sollte $\underline{\eta}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathsf{T}}$ sein.
Weitere Hinweise: Man muss hier sauber darauf achten, dass die Drehungen aktive Drehungen sind, die das mitgeführte körperfeste Referenzsystem drehen. Die *Lage* dieses Referenzsystems im Raum kann durch eine Matrix N angegeben werden, deren Spalten die körperfesten Basisvektoren im raumfesten System enthält. Unter einer Drehung D werden die Komponenten der neuen Basisvektoren in der alten Basis durch die Spalten von D^{T} gegeben. Die entsprechende Änderung der Lage von N nach N' wird daher durch Anwenden von D^{T} (von links) auf N bewirkt, also $N' = D^{\mathsf{T}} N$. Beachten Sie auch, dass die Komponenten des Vektors $\vec{\eta}$, ermittelt im gedrehten Referenzsystem, gerade durch die dazu inverse Drehung gegeben sind, also einfach $\underline{\eta}' = D\,\underline{\eta}$.

Bitte wenden!

[H17] *Rotierendes Bezugssystem* **[$4+2+2=8$ Punkte]**

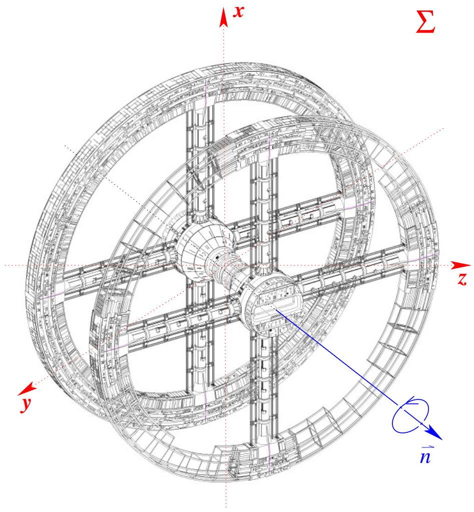
Für die Bewohner einer großen Raumstation wird durch Rotation der Raumstation um ihre Symmetrieachse mittels der Zentripetalkraft eine Art Pseudoschwerkraft erzeugt.* Die Drehachse sei in einem starren fixsternbasierten Bezugssystem Σ durch $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^\mathsf{T}$ gegeben. Die Bewohner sehen nun ein UFO auf sich zukommen, das von der Raumstation aus gesehen sich auf der folgenden Bahn bewegt:

$$\underline{r}'(t) = -v_0 t\Big(\sqrt{2}\big((\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\big), 1+\cos(\omega t)-\sin(\omega t), 1-\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\Big)^\mathsf{T}, \qquad t<0\,.$$

(a) Welche Matrix D vermittelt vom skizzierten Inertialsystem Σ zum System der Raumstation? Zur Zeit $t=0$ fallen beide Systeme zusammen, für allgemeines t ist das bordeigene System um $\varphi = \omega\, t$ relativ zu Σ gedreht.

(b) Überprüfen Sie, dass $\det(D) = 1$ ist, und dass die Zeilen von D zueinander orthogonal sind.

(c) Verwenden Sie D, um damit die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ des UFOs im Inertialsystem Σ anzugeben.



* Hommage à Iain M. Banks: Wie groß muss eine ringförmige Raumstation sein, die durch ihre Rotation eine Pseudoschwerkraft radial nach außen erzeugt, die einer Beschleunigung von 1 g entspricht, und die für eine Umdrehung genau 24 h benötigt?

[H18] *Trägheitstensor I* **[$2+2+4+4=12$ Punkte]**

Durch masselose Drähte sind drei Kugeln starr miteinander verbunden (siehe Skizze unten):

$$\begin{array}{lll} m_1 := m & \text{bei} & \vec{r}_1 \doteq (1,-1,0)^\mathsf{T}\, a \\ m_2 = 4m/3 & \text{bei} & \vec{r}_2 \doteq (-3/4,0,0)^\mathsf{T}\, a \\ m_3 = 6m & \text{bei} & \vec{r}_3 \doteq (0,1/6,0)^\mathsf{T}\, a \end{array}$$

Die Definitionen für den Schwerpunkt $\vec{R}$ und den Trägheitstensor $\hat{I}$ einer Menge von Massepunkten $\{m_i\}$ an den Stellen $\{\vec{r}_i\}$, $i = 1\ldots N$, sind

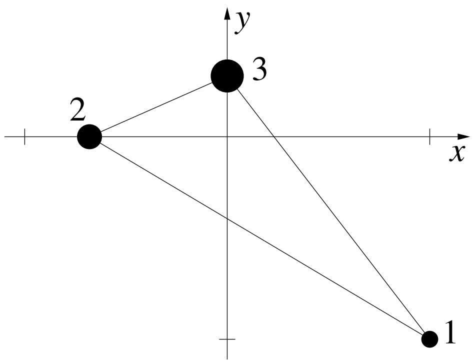
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i\,, \qquad M = \sum_i m_i\,, \qquad \hat{I} = \sum_i m_i\left((\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\,\mathbb{1} - \vec{r}_i\circ\vec{r}_i\right).$$

(a) Wo liegt der Schwerpunkt $\vec{R}$ dieses Systems?

(b) Geben Sie die Komponenten I_{ij} der Matrix I des Tensors $\hat{I}$ an.

(c) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}$ für dieses System.

(d) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_k, $k=1,2,3$, für dieses System (gemeint sind also die Eigenwerte von I). Skizzieren Sie die beiden in der xy-Ebene liegenden Hauptachsen (also die zugehörigen Eigenvektoren).
Teilresultat: $I_1 = \frac{30}{12}\,m\,a^2$ und $I_2 = \frac{5}{12}\,m\,a^2$.



[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: **Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben!** **Lösungen nur als PDF!**