MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION

[H28] *Bogenlänge* **[$3+3+3+3+3=15$ Punkte]**

Wir betrachten Kurven in der Ebene und interessieren uns für die Länge von Stücken von diesen.

(a) Die ebene Kurve sei durch $\vec{r}(t) \doteq (t, f(t))^\intercal$ mit $a \le t \le b$ parametrisiert. Zeigen Sie, dass sich die Bogenlänge durch $\ell = \int_a^b \mathrm{d}t\, \sqrt{1+(f'(t))^2}$ berechnen lässt.

(b) Es sei konkret $f(t) = c\cosh\frac{t}{c}$ mit $0 \le t \le b$ und $c > 0$. Berechnen Sie die Bogenlänge. Es handelt sich um ein Stück einer Kettenlinie.

(c) Die Parametrisierung einer ebenen Kurve über den Polarwinkel φ ist gegeben durch $\vec{r}(\varphi) \doteq (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)^\intercal$ mit $a \le \varphi \le b$. Beweisen Sie, dass die Bogenlänge durch den Ausdruck $\ell = \int_a^b \mathrm{d}\varphi\, \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}$ gegeben ist.

(d) Berechnen Sie konkret die Bogenlänge für ein Stück einer archimedischen Spirale: $r(\varphi) = c\,\varphi$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$.

(e) Berechnen Sie konkret die Bogenlänge für die Kardioide: $r(\varphi) = c\,(1+\cos\varphi)$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $c > 0$.

[H29] *Leistung* **[9 Punkte]**

Ein Hüttendach D mit welliger Höhe $h(x,y) = h_0 + d\,\cos(\frac{2\pi n}{L}x)$, n eine natürliche Zahl, über einer Grundfläche $(x,y) \in [0,L] \times [0,L] =: D$ wird von der Sonne bestrahlt. Der aus der Richtung $(-1,-1,+1)^\intercal$ kommende Photonenstrom wird noch durch eine Wolke ortsabhängig abgeschwächt, so dass die Energiestromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, also der Energiefluss pro Zeit und Fläche, am Ort $\vec{r} \doteq (x,y,z)^\intercal$ die Form

$$\vec{j}(\vec{r}) \doteq \left(\alpha\frac{z}{h_0} - \beta\frac{x}{L}\right)\begin{pmatrix}+1\\+1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha,\beta > 0$$

hat. Mit wie viel Energie pro Zeit (also mit welcher Leistung) $P = -\int_D \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{j}(\vec{r})$ wird das Dach $\vec{r} \doteq (x,y,h(x,y))^\intercal$ bei vollständiger Absorption aufgeheizt?

Hinweis: Ein Integral $\int_0^L \mathrm{d}x\, x\, \sin(kx)$ kann mit partieller Integration gelöst werden. Das Ergebnis lautet $P = (\alpha - \frac{\beta}{2})L^2 - \beta d L$.

[H30] *Satz von Steiner* **[$4+4+4=12$ Punkte]**

Man berechne für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c und konstanter Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ die Komponenten

$$I_{jk} = \int_V \mathrm{d}^3r\, \rho(\vec{r})\, (\vec{r}^{\,2}\,\delta_{jk} - x_j\,x_k) = \int_V \mathrm{d}^3r\, \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}_{jk}$$

des Trägheitstensors in Koordinaten längs der Quader-Achsen, und zwar

(a) bezüglich einer Ecke des Quaders, also $V = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$;

(b) bezüglich des Quader-Schwerpunkts, also $V = [-\frac{a}{2},\frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2},\frac{b}{2}] \times [-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$.

(c) Die Differenz der beiden Matrizen aus (a) und (b) lässt sich in der Form $M(\vec{d}^{\,2}\delta_{jk} - d_j d_k)$ schreiben. Welche Masse M und welcher Vektor $\vec{d}$ treten hier auf?

Hinweis: Die Matrix in (b) sollte Diagonalgestalt haben. Das Resultat (c) ist ein Beispiel des Satzes von Steiner. Die Integrationen sind für jede Komponente der Matrix getrennt vorzunehmen. Es ist $\int \mathrm{d}^3r = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z$, und wird einfach durch hintereinander Ausführen der drei einzelnen Integrationen berechnet.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!