ENERGIESATZ UND EFFEKTIVES POTENTIAL

Energieerhaltung allein kann bei einer Zentralkraft bereits viele qualitative Eigenschaften der Bahnkurve enthüllen.

[P12] *Schwingungsperiode*
Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einer Linie unter dem Einfluss des Potentials $V(x) = k\,|x|^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $k > 0$. Die Gesamtenergie $E > 0$ sei gegeben. Dann schwingt es zwischen den Umkehrpunkten $\pm a$ hin und her.

(a) Geben Sie die Umkehrpunkte an.

(b) Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Periode T von der Gesamtenergie E mittels der Formel

$$T = 2\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V(x))}}\,,$$

ohne das Integral auszuwerten.
Hinweise: Ändern Sie die Koordinate (Integrationsvariable) von x zu $y = \left(\frac{k}{E}\right)^{1/n} x$. Welche y-Werte ergeben sich für die Umkehrpunkte? Versuchen Sie, die E-Abhängigkeit vor das Integral zu ziehen. Schließlich erhalten Sie aus $E(a)$ die gesuchte Periode $T(a)$.
Bemerkung: Das Resultat gilt sogar allgemeiner für alle $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wobei für negative n dann $k < 0$ und $E < 0$ ist.

(c) Für welche Potenz n ist T unabhängig von E bzw. von a? Dies ist der Fall harmonischer Schwingungen.

(d) Was erhalten Sie für das Gravitationspotential, $n = -1$ mit $k < 0$? Dies ist das dritte Keplersche Gesetz.

[P13] *Effektives Potential: Schwarzes Loch*
Das Gravitationsfeld außerhalb eines sphärisch symmetrischen Sterns der Masse M wird in der allgemeinen Relativitätstheorie durch die sogenannte Schwarzschild-Geometrie beschrieben. Ein Testteilchen verspürt in dieser Geometrie das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = -\epsilon\,\frac{\gamma M}{r} + \frac{L^2}{2\,r^2} - \frac{\gamma\,M\,L^2}{r^3}\,.$$

Hierbei haben wir die Einheiten so gewählt, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist. Die Konstante ϵ hat den Wert 1 für massive Testteilchen (mit Einheitsmasse $m = 1$) und ist Null für masselose Testteilchen (Photonen mit $m = 0$). Im Newtonschen Fall fehlt lediglich der dritte Term ($\sim r^{-3}$).

(a) Diskutieren Sie qualitativ die unterschiedlichen Orbits für massive Teilchen im Newtonschen wie im relativistischen Fall, sowie für Photonen im relativistischen Fall.

(b) Bestimmen Sie die Radien $r_0(L)$ kreisförmiger Orbits, und klassifizieren Sie diese Bahnen als stabil bzw. als instabil.

(c) Was ist der minimale Drehimpuls und Radius für die Existenz einer stabilen Kreisbahn im massiven relativistischen Fall?

Bemerkung: Normale Sterne sind so groß, dass die instabilen Kreisbahn-Radien innerhalb des Sterns verlaufen. Sehr massereiche Sterne können aber am Ende ihres Lebens so stark komprimiert werden, dass der Schwarzschild-Radius $r_s = 2\,\gamma\,M$ und beide $r_0(L)$ außerhalb des Sterns liegen. Dann wird $r = r_s$ zum Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs.