

---

---

MATRIZEN UND DREHUNGEN

Mit diesen Aufgaben lernen wir Matrizen und insbesondere Drehungen kennen. Wie in der Vorlesung erklärt, unterscheiden wir ab jetzt zwischen einem abstrakten Vektor  $\vec{a}$  und seiner Komponentendarstellung  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ , die von der Wahl der Basis abhängt. Matrizen wenden wir auf Komponenten  $\underline{a}$  durch Multiplikation „Zeile mal Spalte“ an, so dass  $\underline{a}' = M \underline{a}$ .

**[P14]** *Beispiel einer Matrixgruppe*

Wir wollen hier eine Matrixgruppe studieren. Die Verknüpfung ist die Matrixmultiplikation. Eine Menge  $\mathcal{M}$  von Matrizen bildet eine Gruppe, wenn gilt:

- (1)  $M \cdot M' \in \mathcal{M}$  für alle  $M, M' \in \mathcal{M}$ ,
- (2) es gibt ein Element  $\mathbb{1} \in \mathcal{M}$  mit  $\mathbb{1} \cdot M = M$  für alle  $M \in \mathcal{M}$ ,
- (3) für alle  $M \in \mathcal{M}$  gibt es ein Element  $M^{-1}$  mit  $M^{-1} \cdot M = \mathbb{1}$ .

Überprüfen Sie dies für das folgende Beispiel:

- (a) Multiplizieren Sie Matrizen von der Form

$$M(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass das Ergebnis wieder von dieser Form ist,  $M(r_1, \varphi_1) \cdot M(r_2, \varphi_2) = M(r_3, \varphi_3)$ . Wie sind  $r_3$  und  $\varphi_3$  also gegeben?

- (b) Für welches  $r$  und welches  $\varphi$  ergibt sich für die Quadrate solcher Matrizen

$$(M(r, \varphi))^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

- (c) Welche linearen Abbildungen werden durch solche Matrizen wie in (a) beschrieben? Betrachten Sie dazu, wie solche Matrizen die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  transformieren.
- (d) Finden Sie eine Matrix  $M(r', \varphi')$ , so dass  $M(r', \varphi') \cdot M(r, \varphi) = \mathbb{1}$  ist. Dies ist die zu  $M(r, \varphi)$  inverse Matrix. Für welches  $r$  und  $\varphi$  ist  $M(r, \varphi) = \mathbb{1}$ ?

**[P15]** *Beispiel einer Drehmatrix*

Untersuchen Sie eine lineare Transformation  $D$ , die die Standardbasis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  eines dreidimensionalen Raumes zyklisch vertauscht, also  $D(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ ,  $D(\vec{e}_2) = \vec{e}_3$  und  $D(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$  abbildet.

- (a) Schreiben Sie die Komponenten von  $\vec{a}' = D(\vec{a})$  als Produkt einer Matrix  $D$  mit den Komponenten  $\underline{a}$  von  $\vec{a}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $D$  eine Drehung ist, also Längen unverändert lässt.
- (c) Überlegen Sie, dass eine lineare Abbildung, die alle Längen unverändert lässt, auch alle Winkel nicht ändert.
- (d) Bestimmen Sie einen normierten Vektor  $\vec{n}$ ,  $|\vec{n}| = 1$ , den  $D$  nicht ändert,  $D(\vec{n}) = \vec{n}$ . Was gibt dieser Vektor an?
- (e) Geben Sie einen zur Drehachse senkrechten Vektor  $\vec{b}$  und sein Transformiertes  $\vec{b}' = D(\vec{b})$  an. Berechnen Sie mit dem Skalarprodukt  $\vec{b}' \cdot \vec{b}$  den Drehwinkel.

**[P16]** *Projektoren*

Wir greifen noch einmal die Zerlegung eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$  bezüglich einer Richtung  $\vec{n}$  in dazu parallelen und senkrechten Anteil auf, wobei  $|\vec{n}| = 1$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n} + ((\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a}). \end{aligned}$$

- (a) Es sei die Matrix  $P = \underline{n} \underline{n}^\top$  definiert. Geben Sie die Komponenten  $P_{ij}$  an. Zeigen Sie, dass  $P \vec{a} = \vec{a}_{\parallel}$  ist.
- (b) Die Matrix  $P$  ist ein Projektor. Zeigen Sie, dass  $P^2 = P$  gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass auch  $P_{\perp} = \mathbb{1} - P$  ein Projektor ist, und dass  $(\mathbb{1} - P) \vec{a} = \vec{a}_{\perp}$  gilt. Wie lauten die Komponenten  $(P_{\perp})_{ij}$ ?