
TENSOREN, ELEMENTARE FUNKTIONEN

Wir schließen das Kapitel Tensoren ab und beschäftigen uns mit Funktionen. Viele physikalische Phänomene werden letztlich durch eine recht überschaubare Anzahl von Funktionen beschrieben.

[P19] *Leitfähigkeitstensor*

Durch ein anisotropes Medium fließt proportional zum angelegten elektrischen Feld $\vec{E}$ die folgende Ladung pro Zeit und Fläche:

$$\begin{aligned} j_1 &= 6\sigma_0 E_1 + 4\sigma_0 E_2 \\ j_2 &= 4\sigma_0 E_1 + 6\sigma_0 E_2 + 3\sigma_0 E_3 \\ j_3 &= \qquad\qquad\; 3\sigma_0 E_2 + 6\sigma_0 E_3 \,. \end{aligned}$$

Die Stromdichte und das elektrische Feld stehen also über das Ohmsche Gesetz $\vec{j} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}$ in Beziehung.

(a) Welchen Leitfähigkeitstensor $\hat{\sigma}$ hat das Medium?

(b) In Richtung welchen Einheitsvektors $\vec{f}$ fließt der Strom am besten? Wenden Sie anschließend zur Probe $\hat{\sigma}$ auf $\vec{f}$ an.

(c) Wie lang sind die Halbachsen des Maßellipsoids $\vec{E} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{E} = 1 = \text{konstant}$?

(d) Die inverse Beziehung $\vec{E} = \hat{\rho} \cdot \vec{j}$ definiert den Widerstandstensor $\hat{\rho} \doteq \frac{1}{66\sigma_0} \begin{pmatrix} 27 & -24 & 12 \\ -24 & 36 & -18 \\ 12 & -18 & 20 \end{pmatrix}$. In Richtung welches Einheitsvektors $\vec{g}$ ist der Widerstand am größten und hat welchen Wert $\rho_{\max}$? *Hinweis*: Anstatt die Eigenwerte und eine Hauptachse von $\hat{\rho}$ zu berechnen, nutzen Sie die Relation $\hat{\rho} = \hat{\sigma}^{-1}$.

[P20] *Grundlegendes zu Funktionen*

In der Vorlesung wurden einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen vorgestellt, so zum Beispiel die Ableitung von Umkehrfunktionen.

(a) Wir wollen spaßeshalber die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion von $\ln x$ einführen. Wenn wir wissen, dass $\partial_x \ln\, x = 1/x$ ist, dann können wir damit $\partial_y \exp(y)$ bestimmen.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $\tan x$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $\cos x$.