Statistische Physik

Hausübung, Blatt 2 **WiSe 2018/19** **Abgabe: 1.11.2018**

[H3] Paramagnetismus (6 Punkte)

Betrachten Sie das in der Vorlesung diskutierte Spinsystem. Verwenden Sie die Gauß-Näherung für die Multiplizitätsfunktion:

$$g(N,s) \simeq g(N,0)\,\mathrm{e}^{-2s^2/N}\,. \tag{1}$$

In der Gegenwart eines externen magnetischen Feldes B beträgt die Gesamtenergie

$$U = -2smB\,, \tag{2}$$

wobei m das (konstante) magnetische Moment eines einzelnen Spins ist. Die partielle Magnetisierung ist die Größe

$$\mu = 2s/N\,. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Temperatur dieses Systems (in natürlichen Einheiten) gilt

$$\tau = -\frac{m^2B^2N}{U}\,. \tag{4}$$

(b) Welches ist der wahrscheinlichste Wert für μ, wenn sich das System im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur τ befindet? Erklären Sie, warum die Antwort für $\tau < mB$ ungültig ist.

(c) In der vorigen Hausübung zeigten Sie, dass bei gegebener Energie U die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Spin im Zustand „up“ zu finden,

$$p(\uparrow) \simeq \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2U/(mBN)}} \tag{5}$$

beträgt. Schreiben Sie diese Wahrscheinlichkeit als eine Funktion der Temperatur τ des Gesamtsystems anstelle der Energie U. Zeigen Sie, dass

$$\frac{p(\downarrow)}{p(\uparrow)} = \mathrm{e}^{\delta U/\tau} \tag{6}$$

gilt, wobei δU die Änderung der Gesamtenergie unter Wechsel des einzelnen Spinzustands von „up“ zu „down“ bezeichnet. Dieser Quotient ist der *Boltzmann-Faktor* für einen Spin, welcher sich in thermischem Kontakt mit dem großen *Reservoir* aller anderen Spins befindet.

(d) Berechnen Sie den mittleren Energiebeitrag $\bar{u}$ eines einzelnen Spins als Funktion der Temperatur τ. Spin „up“ trägt $-mB$, spin „down“ trägt $+mB$ zur Gesamtenergie bei. Zeigen Sie, dass

$$\bar{u} = -mB\tanh(mB/\tau)\,. \tag{7}$$

Bitte wenden

[H4] Gleichförmige Quantenzustände **(6 Punkte)**

Wir erinnern: Die von-Neumann-Entropie eines Quantenzustands ρ ist

$$S(\rho) = -\operatorname{tr}(\rho \log \rho)\,. \tag{8}$$

Betrachten Sie einen Hamilton-Operator H mit diskretem Spektrum. Es sei P_i der Projektionsoperator auf den i-ten Eigenraum mit Energie-Eigenwert $U_i \in \mathbb{R}$, d. h.

$$H = \sum_i U_i P_i\,. \tag{9}$$

Dies ist die *Spektralzerlegung* von H, die P_i sind *Spektralprojektoren*. Die Spektralzerlegung ist eindeutig, weil alle Eigenwerte U_i verschieden sind, und weil die P_i einen vollständigen Satz orthogonaler Projektoren bilden, also $P_i P_j = 0$ für $i \neq j$, und $\sum_i P_i = \mathbf{1}$. Die Multiplizität des Eigenwerts U_i (also die Dimension des zugehörigen Eigenraums) ist $\operatorname{tr} P_i$.

(a) Welcher Zustand ρ maximiert die Entropie unter der Bedingung, dass eine Energiemessung mit Sicherheit einen bestimmten Wert U_i ergibt? Wie hoch ist die Entropie in diesem Fall? Skizzieren Sie einen Beweis Ihrer Antwort.

Hinweis: Zeigen Sie erst, dass $\operatorname{tr}(\rho P_i^{\perp}) = 0$ ist, wobei $P_i^{\perp}$ auf den Null-Eigenraum zu P_i projiziert. Schreiben Sie dann die Spur als eine Summe positiver Zahlen.

(b) Betrachten Sie N unabhängige Kopien des Systems, so dass der Hamiltonoperator H für das Gesamtsystem die Summe der Hamiltonoperatoren H_k, $k = 1, \ldots, N$ der Einzelsysteme ist. Drücken Sie die Spektralzerlegung von H durch die Spektralzerlegung eines der Einzelsysteme aus.

Hinweis: Schreiben Sie zuerst H als Linearkombination des vollständigen Systems orthogonaler Projektoren $\{P_{i_1} \otimes P_{i_2} \otimes \cdots \otimes P_{i_N}\}_{i_1,\ldots,i_N=1}^{\infty}$.