Statistische Physik

Präsenzübung, Blatt 2 **WiSe 2018/19** **25.10.2018**

[P4] Ideales Gas

Die Anzahl möglicher Zustände eines idealen Gases von N Teilchen mit Gesamtenergie im Intervall $[U, U+\epsilon]$ beträgt

$$g(N,U) \simeq \epsilon\, f(N)\, U^{3N/2}\,. \tag{1}$$

Das Gas befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur T. Welches ist die wahrscheinlichste Gesamtenergie U des Gases?

[P5] Van-der-Waals-Gas

In einem realistischeren Modell eines Gases, welches die endliche Teilchengröße sowie eine attraktive Wechselwirkung berücksichtigt, beträgt die Gesamtenergie im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur τ

$$U = \frac{3}{2}\, N\tau - \frac{aN^2}{V}\,. \tag{2}$$

Hierbei ist N die Anzahl der Teilchen, V das Volumen des Gases und a eine Konstante. Leiten Sie aus dieser Gleichung eine allgemeine Formel für die Entropie $\sigma(N, V, U)$ ab.

Bitte wenden

[P6] Quantenmechanischer Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie N identische quantenmechanische harmonische Oszillatoren mit Eigenfrequenz ω. Die Energie-Eigenwerte eines einzelnen Oszillators sind $n_1\hbar\omega$, $n_1 = 0, 1, 2, \ldots$. (Die Nullpunktenergie spielt keine Rolle, darum ignorieren wir sie.) Alle Eigenwerte haben Multiplizität Eins. Wenn die N Oszillatoren sich auf den Energieniveaus $(n_1, \ldots, n_N)$ befinden, dann ist die Gesamtenergie des Systems

$$U = n\hbar\omega\,, \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=1}^{N} n_i\,. \tag{3}$$

(a) Gesucht ist die Anzahl $g(N, n)$ zugänglicher Zustände für N Oszillatoren mit Gesamtenergie $U = n\hbar\omega$. Natürlich entspricht $g(N, n)$ der Anzahl an Möglichkeiten, mit der sich N nicht-negative ganze Zahlen zu n addieren können. Diese Zahl direkt zu bestimmen ist schwierig, darum benutzen wir einen Trick. Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) := (1-t)^{-N} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)^N = \sum_{n_1,\ldots,n_N=0}^{\infty} t^{\sum_i n_i}\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie durch geeignetes Anordnen der Terme in der Summe, dass

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(N, n)\, t^n\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie jetzt durch wiederholtes Differenzieren, dass

$$g(N, n) = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}\,. \tag{6}$$

(b) Nehmen Sie an, dass sowohl $N \gg 1$ als auch $n \gg 1$ gilt. Finden Sie eine Näherung für die Entropie $\sigma(N, n)$ mit Hilfe der Stirling-Formel $\log N! \simeq N \log N - N$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe obiger Näherung, dass für die Gesamtenergie $U = n\hbar\omega$ als Funktion der Temperatur τ gilt

$$U = \frac{N\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/\tau} - 1}\,. \tag{7}$$