Statistische Physik

Präsenzübung, Blatt 13 **WiSe 2018/19** **24.1.2019**

[P27] Dezimierung des zweidimensionalen Ising-Modells

Das zweidimensionale Ising-Modell auf einem quadratischen Gitter mit homogenen Wechselwirkungen zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn sowie externem Magnetfeld h genügt dem Hamiltonoperator H, mit

$$-\frac{H}{\tau} = K \sum_{k \in E} \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} + L \sum_{d \in D} \sigma_{d_1} \sigma_{d_2} + h \sum_i \sigma_i \,. \tag{1}$$

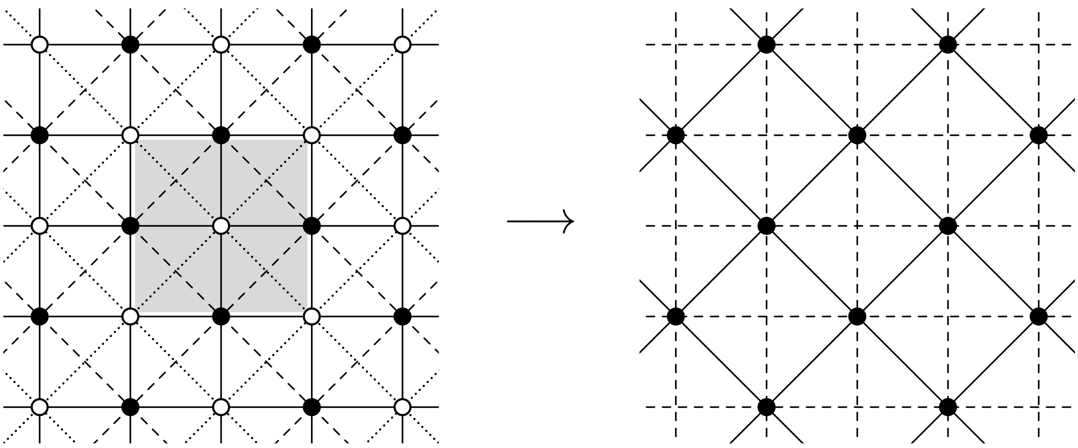
Hierbei ist E die Menge aller Kanten (Paare nächster Nachbarn) des Gitters, D ist die Menge aller Diagonalen (Paare übernächster Nachbarn), und k_i, d_i, $i = 1, 2$, bezeichnen die Gitterplätze an den Endpunkten der Kanten/Diagonalen. Die letzte Summe läuft über alle Gitterplätze.

Es sei N die Anzahl aller Gitterplätze. Das Gesamtgitter werde wie ein Schachbrett in zwei Teilgitter A und B zerlegt, welche jeweils die Hälfte aller Gitterplätze belegen, so dass jeder Gitterplatz in A nur nächste Nachbarn in B hat, und umgekehrt. S_A sei die Menge aller möglichen Spinkonfigurationen auf Teilgitter A, S_B die Menge aller möglichen Konfigurationen auf Teilgitter B.

Vernachlässigen Sie alle Effekte am Rand des Gitters. Berechnen Sie den effektiven Hamiltonoperator H' bis zur Ordnung 2 in K und bis zur Ordnung 1 in L und h (vernachlässigen Sie Terme $\sim Lh$), so dass für die Zustandssumme Z gilt:

$$Z = \sum_{S_A, S_B} \mathrm{e}^{-H/\tau} \simeq \sum_{S_B} \mathrm{e}^{-H'/\tau} \,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass H und H' bis auf einen konstanten Term die gleiche Form haben, und schreiben Sie die Renormalisierungsgleichungen für die Parameter K, L und h.



Links: Ursprüngliches Gitter mit Teilgitter A (weiße Punkte) und Teilgitter B (schwarze Punkte), Kanten E (durchgezogen, Wechselwirkung K) und Diagonalen D (gepunktet/gestrichelt, Wechselwirkung L). *Hervorhebung:* Gitterplatz im Teilgitter A mit Wechselwirkungen zu den nächsten und übernächsten Nachbarn. **Rechts:** Dezimiertes Gitter (nach Summation über S_A).