Lösungen Blatt 6

Feldinhalt von Superstring-Theorien

1) Der gedrehte Tensor $\tilde{M}_{ij}$ zerfällt wie M_{ij} in 3 Teile. Als irred. Darstellungen müssen sie unter Drehung invariant sein.
Wir rechnen nach:

$$\left[\widetilde{\frac{1}{n}\delta_{ij}(\mathrm{tr}\, M)}\right] = \Lambda_i^k \Lambda_j^l \left(\frac{1}{n}\delta_{kl}\,\delta^{mn} M_{mn}\right)$$
$$= \Lambda_i^k \Lambda_j^l \delta_{kl} \frac{1}{n}\delta^{mn} M_{mn}$$
$$= \delta_{ij}\frac{1}{n}\delta^{mn} M_{mn}$$

→ Drehung bildet den Spurteil von M auf den Spurteil von $\tilde{M}$ ab.

$$\tilde{M}_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\tilde{M}_{ij} - \tilde{M}_{ji}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Lambda_i^k \Lambda_j^l M_{kl} - \Lambda_j^k \Lambda_i^l M_{kl}\right)$$
$$= \Lambda_i^k \Lambda_j^l M_{[kl]}$$

→ Der antisym. Teil von $\tilde{M}$ ist der gedrehte antisym. Teil von M.

2) $8_v \otimes 8_v$ liefert eine Tensordarstellung, die unter $SO(8)$-Wirkung zerfällt in

$$8_v \otimes 8_v = \underset{\text{Spur}}{1} + \underset{\text{antisym.}}{28} + \underset{\text{spurfrei, symmetrisch}}{35}$$

3) An der Blockstruktur von A_{AB} sieht man, dass die Indexkombination $a\dot{b}$ nur für ungerade p vorkommt. Also:

$$\psi_a \lambda_{\dot{b}} = \sum_{p \text{ ungerade}} (\gamma^{i_1 \cdots i_p})_{a\dot{b}} \; \psi C \gamma_{i_1 \cdots i_p} \lambda$$

Weil das Produkt aus Γ-Matrizen antisym. ist, folgt

$$\psi_a \lambda_{\dot{b}} \in \bigoplus_{p \text{ ungerade}} \Lambda^p V \qquad V = \text{Darstellungsraum von } SO(8),\ \dim V = 8$$

Es muss gelten $p \leq 8$, und in der Summe kommen Darstellungen der Dimensionen

$$\binom{8}{1} = \binom{8}{7}, \quad \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

vor. Also:

$$8_s \otimes 8_c = 8 + 56$$

$\rightsquigarrow$ Feldinhalt von Typ IIA-Theorie:

$$(8_v \otimes 8_v) + \underbrace{(8_v \otimes 8_s) + (8_v \otimes 8_c)}_{\text{Fermionen}} + (8_s \otimes 8_c)$$

$$= 1 + 8 + 28 + 35 + 56 + \text{Fermionen}$$

4) Elemente aus $8_s \otimes 8_s$ zerfallen analog:

$$\psi_a \lambda_b = \sum_p (\gamma^{i_1 \cdots i_p})_{ab} \; \psi C \gamma_{i_1 \cdots i_p} \lambda$$

Jetzt hat man allerdings zwei ungepunktete Indizes und daher $\sum_{p \text{ gerade}}$.

Man bekommt also Darstellungen der Dim.

$$\binom{8}{0} = \binom{8}{8} = 1$$

$$\binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28$$

$$\binom{8}{4} = 70$$

Zustandssumme

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\omega^n}{1-\omega^n}\right)^8 = \left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+\omega^n}{1-\omega^n}\right)^8$$

$$= \exp\left(8\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1+\omega^n}{1-\omega^n}\right)\right)$$

$$= \exp\left[8\sum_n \ln\left((1+\omega^n) - \ln(1-\omega^n)\right)\right]$$

$a\cdot b = e^{\ln a}\cdot e^{\ln b} = e^{\ln a+\ln b}$

$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$

$$= \exp\left(8\sum\left[\ln\left(1-(-\omega^n)\right) - \ln(1-\omega^n)\right]\right)$$

$$= \exp\left(8\sum\left[-\left((-\omega^n)+\frac{(-\omega^n)^2}{2}+\dots\right)+\omega^n+\frac{(\omega^n)^2}{2}+\dots\right]\right)$$

$$= \exp\left(8\sum\left(-(-\omega^n)-\cancel{\frac{\omega^{2n}}{2}}+\dots+\omega^n+\cancel{\frac{\omega^{2n}}{2}}+\dots\right)\right)$$

$$= \exp\left(8\sum 2\omega^n\right)$$

$$= \exp\left[16(\omega+\omega^2+\dots)\right]$$

$$= 1+16(\omega+\omega^2)+\frac{16^2}{2}(\omega+\omega^2)^2+\dots$$

$$= 1+16\omega+16\omega^2+128\omega^2+\dots$$

$$= 1+16\omega+144\omega^2+\dots$$

Susy - Transformationen

$\theta^A\Gamma^+\partial_\alpha\theta^A = \theta^A\partial_\alpha\Gamma^+\theta^A = 0$ in LC-Eichung

$$\theta^A\Gamma^i\partial_\alpha\theta^A = -\theta^A\Gamma^i\,\frac{\Gamma^+\Gamma^- - \Gamma^-\Gamma^+}{2}\,\partial_\alpha\theta^A$$

$$= -\frac{\theta^A\Gamma^i\Gamma^+\Gamma^-}{2}\,\partial_\alpha\theta^A$$

$$= \frac{\theta^A}{2}\Gamma^i\Gamma^-\Gamma^+\partial_\alpha\theta^A$$

$$= 0$$

mit

$$\{\Gamma^+,\Gamma^-\} \sim \{\Gamma^0+\Gamma^9,\Gamma^0-\Gamma^9\}$$

$$= \{\Gamma^0,\Gamma^0\}+\{\Gamma^0,\Gamma^9\}+\{\Gamma^9,\Gamma^0\}-\{\Gamma^9,\Gamma^9\}$$

$$= 2+0+0-2$$

$$= 0$$