Drei-Graviton-Amplitude und Einsteinsche Gravitation

1. Der Graviton-Vertexoperator lässt sich folgendermaßen als Produkt von Photon-Vertexoperatoren schreiben:

$$V_g(k,\xi,\tau,\sigma) = V_\gamma\left(\frac{k}{2},\epsilon_R,\tau{-}\sigma\right) V_\gamma\left(\frac{k}{2},\epsilon_L,\tau{+}\sigma\right)\Big|_{\epsilon_R\otimes\epsilon_L\to\xi} \tag{1}$$

   Verwenden Sie diese Faktorisierung, um die Drei-Graviton-Amplitude

$$A_{ggg} = \langle 0|V_g(k_1,\xi_1)V_g(k_2,\xi_2)V_g(k_3,\xi_3)|0\rangle \tag{2}$$

   mit

$$V_g(k,\xi) \propto \xi_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} : \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu e^{ik\cdot X} : \tag{3}$$

   und $X = X_{cl}$ durch Drei-Photon-Amplituden auszudrücken.

2. Berechnen Sie die Tree-Level-Drei-Graviton-Amplitude in Ordnung $\mathcal{O}(\alpha'^0)$ unter Verwendung des Resultats aus der Vorlesung für die Drei-Photon-Amplitude,

$$A^{tree}_{\gamma\gamma\gamma}(k_1,\epsilon_1,k_2,\epsilon_2,k_3,\epsilon_3) \propto \epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu\epsilon_3^\rho t_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3), \tag{4}$$

   wobei der Tensor $t_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3)$ wie folgt gegeben ist:

$$t_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3) = k_{2\mu}\eta_{\nu\rho} + k_{3\nu}\eta_{\rho\mu} + k_{1\rho}\eta_{\mu\nu} + 2\alpha' k_{2\mu}k_{3\nu}k_{1\rho} \tag{5}$$

3. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der klassischen Drei-Graviton-Amplitude, die sich (in geeigneter Eichung) aus der Einsteinschen Gravitation mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$ ergibt:

$$\begin{aligned} A^{tree}_{\gamma\gamma\gamma} \propto\ & \xi_1^{\mu\mu'}(k_\mu k_{\mu'})_2 \xi_2\cdot\xi_3 + \text{ zyklische Permutationen} \\ & + \xi_1^{\mu\mu'}k_{2\mu}(\xi_2^{\nu\nu'}k_{3\nu'}\xi_{3\mu'\nu} + \xi_3^{\rho\rho'}k_{1\rho'}\xi_{2\mu'\rho}) \\ & + \xi_2^{\nu\nu'}k_{3\nu}(\xi_1^{\mu\mu'}k_{2\mu'}\xi_{3\mu\nu'} + \xi_3^{\rho\rho'}k_{1\rho'}\xi_{1\nu'\rho}) \\ & + \xi_3^{\rho\rho'}k_{1\rho}(\xi_1^{\mu\mu'}k_{2\mu'}\xi_{2\mu\rho'} + \xi_2^{\nu\nu'}k_{3\nu'}\xi_{1\nu\rho'}) \end{aligned} \tag{6}$$

   Welche zusätzlichen Terme zur Einsteinschen Gravitation könnten die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha')$ und $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ aus obiger Stringrechnung reproduzieren?

Dirac-Born-Infeld-Elektrodynamik

Die Raumzeit-Wirkung des offenen String (im Minkowski-Raum mit elektromagnetischem Feld $F_{\mu\nu}$) lautet

$$S^0_{DBI}[A] \propto \int d^D x \sqrt{-\det(\eta + 2\pi\alpha' F)} \propto \int d^D x \sqrt{\det(1+M)} \tag{7}$$

mit $\eta=(\eta_{\mu\nu})$ und $F=(F_{\mu\nu})=(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ sowie der $D\times D$-Matrix $(M^\mu{}_\nu = 2\pi\alpha' \eta^{\mu\rho} F_{\rho\nu})$.

1. Begründen Sie, warum die zweite Proportionalität in Gleichung (7) gilt.

2. Entwickeln Sie S^0_{DBI} bis zur Ordnung F^4 unter Benutzung von $\det K = e^{\mathrm{tr}\,\ln K}$ für eine Matrix K und $\ln(1+M) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} M^n$. Begründen Sie, warum die ungeraden Potenzen von M nicht beitragen.

3. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung durch Variation von S_{DBI} nach $A^\mu(x)$. Zur Vereinfachung verwenden Sie

$$\frac{\delta (M^2)_{\rho\lambda}(y)}{\delta A^\mu(x)} = \delta(x-y)\left(\partial_\rho F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\rho}\right)(x) + \text{ irrelevante Terme} \tag{8}$$

   in

$$\frac{\delta S_{DBI}}{\delta A^\mu(x)} = \int d^D y \frac{\delta (M^2)_{\rho\lambda}(y)}{\delta A^\mu(x)} \cdot \frac{\delta S_{DBI}}{\delta (M^2)_{\rho\lambda}(y)}, \tag{9}$$

   nachdem Sie S_{DBI} durch M^2 ausgedrückt haben.