

Aufgabe 7: Clifford-Algebren und Spinordarstellungen der Lorentzgruppe

Zeigen Sie, dass die Operatoren $\Sigma^{ab} := \frac{i}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]$ eine Spinordarstellung der Lorentzgruppe $SO(1, d-1)$ erzeugen, wenn die Γ^a die Antivertauschungsrelationen der Cliffordalgebra erfüllen:

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad a, b = 0, 1, \dots, d-1. \quad (1)$$

1. Zeigen Sie zuerst nur unter Verwendung von (1), dass folgende Relation erfüllt ist:

$$[\Sigma^{ab}, \Gamma^c] = i(\Gamma^a\eta^{bc} - \Gamma^b\eta^{ac}).$$

Hinweis: Es gilt $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$.

2. Zeigen Sie mit obigem Ergebnis, dass die Matrizen Σ^{ab} eine Darstellung der Lorentzalgebra bilden:

$$[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}] = i(\eta^{bc}\Sigma^{ad} - \eta^{ac}\Sigma^{bd} - \eta^{bd}\Sigma^{ac} + \eta^{ad}\Sigma^{bc}). \quad (2)$$

3. Prüfen Sie nun, dass die Σ^{ab} tatsächlich eine *Spinordarstellung* der Lorentzgruppe erzeugen. Berechnen Sie dazu den Drehoperator in der (x^1, x^2) -Ebene,

$$\Lambda(\theta) = \exp(i\theta\Sigma^{12}),$$

wobei θ der (endliche) Drehwinkel ist. Benutzen Sie (1), um das Matrixexponential auszuwerten und zeigen Sie, dass

$$\Lambda(\theta) = \mathbf{1}f(\theta) + \Sigma^{12}g(\theta),$$

mit Funktionen $f(\theta)$ und $g(\theta)$ gilt. Bestimmen Sie $f(\theta)$ und $g(\theta)$.

4. Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus Teil 3, dass $\Lambda(\theta = 2\pi) = -\mathbf{1}$, also dass es sich wirklich um eine Spinordarstellung handelt.

Aufgabe 8: Majorana-Bedingung

In geraden Dimensionen d sind die Darstellungsmatrizen Γ^a der Clifford-Algebra $Cl(d-1, 1)$ äquivalent zu ihren komplex Konjugierten $\pm\Gamma^{a*}$, d.h. es gibt eine Matrix B , sodass

$$\Gamma^{a*} = \eta B\Gamma^a B^{-1} \quad (3)$$

mit $\eta = \pm 1$.

1. Benutzen Sie Gleichung (3) und Schurs Lemma, um zu zeigen, dass B^*B proportional zur Identität ist:

$$B^*B = \epsilon \mathbf{1} \quad (4)$$

für ein $\epsilon \in \mathbb{C}$.

2. Benutzen Sie Gleichung (4) und die Normierung $|\det B| = 1$, um zu zeigen, dass ϵ die Werte ± 1 annimmt.
3. In ungeraden Dimensionen d konstruiert man Darstellungen der Cliffordalgebra, indem man zu den Matrizen $\Gamma^a, a = 0, 1, \dots, d-2$, eine weitere Matrix

$$\Gamma := (-i)^{\frac{d+1}{2}} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{d-2} \quad (5)$$

hinzunimmt. Um die Majoranabedingung an die Darstellungen stellen zu können, muss diese Matrix ebenfalls eine Bedingung wie in Gleichung (3) erfüllen. Zeigen Sie unter Verwendung von (5) und (3), dass Γ die Bedingung

$$\Gamma^* = (-1)^{\frac{d+1}{2}} B \Gamma B^{-1} \quad (6)$$

erfüllt.

Aufgabe 9: Diracmatrizen in vier Dimensionen

Die Diracmatrizen in $d = 2k + 2$ Dimensionen können nach folgender Vorschrift aus den Diracmatrizen in $d = 2$ Dimensionen konstruiert werden:

$$d = 2 : \quad \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$d = 2k + 2 : \quad \Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu = 0, 1, \dots, d-3 \quad (8)$$

$$\Gamma^{d-2} = \mathbf{1}_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Gamma^{d-1} = \mathbf{1}_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

γ^μ bezeichnen dabei die Dirac-Matrizen in $d - 2$ Dimensionen.

1. Zeigen Sie, dass Γ^0 und Γ^1 die Clifford-Relationen erfüllen, dass sie also eine mögliche Wahl von Erzeugern in $d = 2$ sind.
2. Berechnen Sie Γ für $d = 3$.
3. Konstruieren Sie nach obiger Vorschrift die Dirac-Matrizen in vier Dimensionen.