Feldinhalt von Superstring-Theorien

Bestimmen Sie den bosonischen Feldinhalt von Typ IIA-Stringtheorie, also die Zerlegung der Produkte $\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v$ und $\mathbf{8}_s \otimes \mathbf{8}_c$ in irreduzible $SO(8)$-Darstellungen. Betrachten Sie zunächst das Produkt $\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v$:

1. Ein beliebiger n-dimensionaler Rang-2-Tensor zerfällt unter $SO(n)$-Wirkung in drei irreduzible Darstellungen:

$$M_{ij} = \underbrace{M_{(ij)} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta^{mn}M_{mn}}_{\text{symmetrisch, spurfrei}} + \underbrace{M_{[ij]}}_{\text{antisymmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{n}\delta_{ij}\delta^{mn}M_{mn}}_{\text{Spur}} \tag{1}$$

   Die Erzeuger Λ_i^k der $SO(n)$ wirken auf diesen Tensor als

$$\widetilde{M}_{ij} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l M_{kl}. \tag{2}$$

   Mit der Zerlegung aus Gleichung (1) erhält man die irreduziblen Komponenten der Tensordarstellung. Zeigen Sie, dass die Spurkomponente und die antisymmetrische Komponente tatsächlich invariant unter $SO(n)$-Wirkung sind.

2. Zerlegen Sie mit diesem Wissen das Tensorprodukt $\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v$ in eine Summe aus irreduziblen $SO(8)$-Darstellungen. Benennen Sie die Darstellungen nach ihrer Dimension.

3. Das Produkt zweier $SO(8)$-Spinoren $\psi_a \in \mathbf{8}_s$ und $\lambda_{\dot{b}} \in \mathbf{8}_c$ zerfällt unter $SO(8)$-Wirkung folgendermaßen in antisymmetrische Tensoren:

$$\psi_a \lambda_{\dot{b}} = \sum_p (\gamma^{i_1\cdots i_p} C^{-1})_{a\dot{b}} \psi C \gamma_{i_1\cdots i_p} \lambda \tag{3}$$

   Dabei bezeichnet C die Ladungskonjugationsmatrix und $\gamma_{i_1\cdots i_p}$ ein antisymmetrisches Produkt aus p γ-Matrizen. Die Koeffizienten $(\gamma^{i_1\cdots i_p} C^{-1})_{a\dot{b}}$ sind 8×8-Matrizen. In einer geeigneten Basis zerfällt die 16-dimensionale Majorana-Weyl-Darstellung in $10D$ folgendermaßen in diese 8-dimensionalen Blöcke:

$$(\gamma^{i_1\cdots i_p} C^{-1})_{AB} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{i_1\cdots i_p}_{a\dot{b}} \\ \gamma^{i_1\cdots i_p}_{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}, p \text{ ungerade} \\ \\ \begin{pmatrix} \gamma^{i_1\cdots i_p}_{ab} & 0 \\ 0 & \gamma^{i_1\cdots i_p}_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}, p \text{ gerade} \end{cases} \tag{4}$$

   Wir benutzen die Indexnotation: $A = (a, \dot{a})$, um die gepunkteten und ungepunkteten Indizes zusammenzufassen. Mit dieser Zerlegung kann man die Summe über p in Gleichung (3) genauer beschreiben. Welche Summanden treten auf? Bezeichnen Sie die irreduziblen Darstellungen wieder mit ihrer Dimension.

4. Wie sieht die Summe in Typ IIB-Theorie aus (Zerlegung von $\mathbf{8}_s \otimes \mathbf{8}_s$)?

Zustandssumme für Typ I-Theorie

Die Zustandssumme für Typ I-Zustände wird beschrieben durch die erzeugende Funktion

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^n}{1-w^n} \right)^8 , \tag{5}$$

wobei d_n die Anzahl der Zustände mit Masse $\alpha' M^2 = n - 1$ bezeichnet. Entwickeln Sie $G(w)$ bis zur Ordnung w^2.

Supersymmetrie-Transformationen

Zeigen Sie, dass in Lichtkegeleichung $\theta^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A$ für $\mu = +, i$ verschwindet. (Dies ist entscheidend für die Vereinfachung der Bewegungsgleichungen.) Hinweis: Es gilt

$$1 = -\frac{\Gamma^+\Gamma^- + \Gamma^-\Gamma^+}{2} \tag{6}$$