Einführung in die Stringtheorie

Übung, Blatt 12 **SS 06 14.07.06**

[P23] Faktorisierung von Vertexoperatoren des geschlossenen Strings

Die Fourier-Entwicklung des geschlossenen Strings lässt sich als Summe von Links- und Rechtsläufern schreiben:

$$
\begin{aligned}
X^\mu_{\text{closed}}(\sigma,\tau) &= X^\mu_R(\xi^-) + X^\mu_L(\xi^+) \quad \text{mit} \\
X_R(\xi^-) &= \tfrac{1}{2} q^\mu_R + \tfrac{1}{2}\alpha' p^\mu_R \xi^- + \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{\mathrm{i}}{n}\, \alpha^\mu_n\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi^-} \ , \\
X_L(\xi^+) &= \tfrac{1}{2} q^\mu_L + \tfrac{1}{2}\alpha' p^\mu_L \xi^+ + \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{\mathrm{i}}{n}\, \tilde{\alpha}^\mu_n\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi^+} \ .
\end{aligned}
$$

(a) In der Vorlesung wurden folgende Größen eingeführt:

$$
p^\mu = \tfrac{1}{2}(p^\mu_L + p^\mu_R) \quad , \quad w^\mu = \tfrac{1}{2}(p^\mu_L - p^\mu_R) \quad , \quad q^\mu = \tfrac{1}{2}(q^\mu_L + q^\mu_R) \ .
$$

Die Quantisierungsbedingungen ergaben $[q^\mu, p^\nu] = \mathrm{i}\ \eta^{\mu\nu}$ sowie, dass die Windungszahl w proportional zum Einheitsoperator ist. Welche Rückschlüsse lassen sich daraus auf die Impulse $p^\mu_{L,R}$ und Koordinaten $q^\mu_{L,R}$ ziehen? Diskutieren Sie vor allem den Fall $w = 0$.

(b) Verwenden Sie obiges Ergebnis, um den Tachyonvertex[1]

$$
V^{\text{closed}}_T(\sigma,\tau;k) = :\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X_{\text{closed}}}:
$$

für den geschlossenen String zu vereinfachen. Wie ist der Zusammenhang mit dem Tachyonvertex des offenen Strings $V^{\text{open}}_T(\sigma,\tau;k)$?

[P24] Drei-Graviton-Amplitude und Einsteinsche Gravitation

(a) Verwenden Sie die Erkenntnisse aus dem vorigen Beispiel, um die Drei-Graviton-Amplitude

$$
A_{ggg} = \langle V_g(k_1) V_g(k_2) V_g(k_3)\rangle \qquad \text{mit} \qquad V_g(k) \sim \xi_{\mu\nu}\ \eta^{\alpha\beta} : \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X} :
$$

und $X = X_{\text{closed}}$ auf aus der Vorlesung bekannte Amplituden zurückzuführen.

(b) Berechnen Sie die Tree-Level Drei-Graviton-Amplitude bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha')$ unter der Verwendung des Resultats aus der Vorlesung für die Drei-Photon-Amplitude,

$$
A^{\text{tree}}_{\gamma\gamma\gamma}(k_1,k_2,k_3) \sim \epsilon^\mu_1\ \epsilon^\nu_2\ \epsilon^\rho_3\ t_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3) \ ,
$$

wobei der Tensor $t_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3)$ wie folgt gegeben ist:

$$
t_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3) = k_{2\mu}\eta_{\nu\rho} + k_{3\nu}\eta_{\rho\mu} + k_{1\rho}\eta_{\mu\nu} + 2\alpha' k_{2\mu}k_{3\nu}k_{1\rho} \ .
$$

[1] Der Faktor y aus der Vorlesung und der letzten Übung spielt für diese Betrachtung keine Rolle.

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der klassischen Drei-Graviton-Amplitude, die sich (in einer geeigneten Eichung!) aus der Einsteinschen Gravitation mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, R$ ergibt:

$$\begin{aligned} A^{\text{tree}}_{ggg} \quad \sim \quad & \xi_1^{\mu\mu'}(k_\mu k_{\mu'})_2\ \xi_2 \cdot \xi_3 \ + \ \text{zyklische Permutationen} \\ & + \xi_1^{\mu\mu'}\ k_{2\mu}\ (\xi_2^{\nu\nu'}\ k_{3\nu'}\ \xi_{3\mu'\nu} + \xi_3^{\rho\rho'}\ k_{1\rho'}\ \xi_{2\mu'\rho}) \\ & + \xi_2^{\nu\nu'}\ k_{3\nu}\ (\xi_1^{\mu\mu'}\ k_{2\mu'}\ \xi_{3\mu\nu'} + \xi_3^{\rho\rho'}\ k_{1\rho'}\ \xi_{1\nu'\rho}) \\ & + \xi_3^{\rho\rho'}\ k_{1\rho}\ (\xi_1^{\mu\mu'}\ k_{2\mu'}\ \xi_{2\mu\rho'} + \xi_2^{\nu\nu'}\ k_{3\nu'}\ \xi_{1\nu\rho'})\ . \end{aligned}$$

Welche zusätzlichen Terme zur Einsteinschen Gravitation könnten die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha')$ und $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ aus obiger Stringrechnung reproduzieren? Was kann man aus der Faktorisierung der Vertexoperatoren für die Amplitude der Einsteinschen Gravitation schließen?