Theoretische Physik C **(Abgabe bis 8. Januar 2021, 23:59)**

Hausübung 10

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Für diesen 10. Hausübungszettel haben Sie aufgrund der Weihnachtspause bis zum 8. Januar Zeit. Er enthält neben den zwei regulären Aufgaben auch noch Bonusaufgaben, mit denen Sie Ihr Punktekonto auffüllen können. Die nächste Präsenzübung findet am 5. Januar statt.

Aufgabe 1: Kugelflächenfunktionen am Ende der Leiter (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung das Eigenwertproblem für die Operatoren L^2 und L_3 im Ortsraum gelöst. Die Eigenzustände sind in Ortsdarstellung die Kugelflächenfunktionen $\langle\theta,\phi|\ell,m\rangle = Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$. In dieser Aufgabe lernen Sie, wie Sie diese konstruieren können.

[**HÜ 1.1**] Was ergibt $L_+|\ell,\ell\rangle$? Schreiben Sie die Gleichung in Ortsdarstellung und gewinnen Sie somit eine Differentialgleichung für $f := Y_{\ell,\ell}$. Zeigen Sie, dass sich diese als

$$\tan(\theta)\, f_\theta = -\mathrm{i} f_\phi$$

schreiben lässt. Dabei nutzen wir die Kurzschreibweise $f_\alpha := \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ für die partielle Ableitung nach einer Koordinate α.

[**HÜ 1.2**] Separieren Sie die Differentialgleichung mit einem Produktansatz $f(\theta,\phi) = g(\theta)\, h(\phi)$, nennen Sie die Separationskonstante ℓ.

[**HÜ 1.3**] Zeigen Sie, dass $g(\theta) = A\sin^\ell(\theta)$ die Gleichung löst. Finden Sie außerdem die Lösung für $h(\phi)$. Für Bahndrehimpulse muss gelten $h(0) = h(2\pi)$. Welche Werte sind somit für ℓ möglich?

[**HÜ 1.4**] Normieren Sie Ihre gefundene Lösung.

Hinweis: $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin^{2\ell+1}(\theta) = \frac{2(2^\ell \ell!)^2}{(2\ell+1)!}$.

[**HÜ 1.5**] Nutzen Sie Ihr Resultat und den Operator L_-, um $Y_{1,1}, Y_{1,0}$ und $Y_{1,-1}$ in Ortsdarstellung zu berechnen.

Aufgabe 2: Eigenschaften des Wasserstoffatoms (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befinde sich im normierten Grundzustand $|\psi\rangle$, der durch

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$

und dem Bohrschen Radius $a_0 = \frac{\hbar}{me^2} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}$ beschrieben wird.

[**HÜ 2.1**] Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Inneren einer Kugel vom Radius a_0?

[**HÜ 2.2**] Verifizieren Sie durch explizite Rechnung in Ortsdarstellung die bekannten Ausdrücke für die Erwartungswerte der Energie H und des Drehimpulses $\vec{L}$ im Grundzustand.

Hinweise:
$\int \mathrm{d}^3r\, f(r) = 4\pi \int \mathrm{d}r\, r^2 f(r)$, $\int \mathrm{d}^3r\, g(r)\Delta g(r) = -4\pi \int \mathrm{d}r\, r^2 g'(r)^2$, $\langle\vec{r}|\vec{L}|\psi\rangle = \vec{r} \times \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla}\langle\vec{r}|\psi\rangle$.

Eine Anregung bringe das Elektron in einen normierten Zustand $|\varphi\rangle$ mit Ortswellenfunktion

$$\langle\vec{r}|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}\left[\varphi_{100}(\vec{r}) + 3\varphi_{211}(\vec{r}) + 4\varphi_{200}(\vec{r}) + 2\varphi_{320}(\vec{r})\right] ,$$

wobei $\varphi_{nlm}(\vec{r}) = \langle\vec{r}|n,\ell,m\rangle$ die Ortswellenfunktionen des Wasserstoffatoms mit den Quantenzahlen n, ℓ und m bezeichnet.

[**HÜ 2.3**] Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie H mithilfe von $E_n = -\frac{\mathrm{Ry}}{n^2}$.

[**HÜ 2.4**] Wie lautet der Erwartungswert für L^2?

[**HÜ 2.5**] Wie lautet der Erwartungswert für L_3?

Hinweis: Nutzen Sie die Orthonormalität $\langle n,\ell,m|n',\ell',m'\rangle = \delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$.

Aufgabe 3: Spinmessungen (1+1+1+1+1=5 Extrapunkte)

Der Spin eines Elektrons wird quantenmechanisch durch einen Vektor im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ beschrieben. Die zu einer Spinmessung in Richtung $\vec{n}$ korrespondierende Observable ist der Operator $S_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{S}$, wobei $\vec{S} \doteq \frac{\hbar}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\top$ ist bezüglich der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Hierbei sind die Pauli-Matrizen durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

gegeben.

[HÜ 3.1] Beweisen Sie die Kommutatorrelationen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \sigma_k \,,$$

wobei wie üblich ϵ_{ijk} das Levi-Civita-Symbol bezeichnet. Folgern Sie, dass die Operatoren S_i die Drehimpulsalgebra erfüllen.

[HÜ 3.2] Beweisen Sie:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\, \delta_{ij}\, \mathbb{1} \,.$$

[HÜ 3.3] Kombinieren Sie die Ergebnisse von Aufgabe 3.1 und 3.2, um

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\, \mathbb{1} + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \sigma_k$$

zu zeigen. Können Sie daraus einen Ausdruck für σ_i^n ableiten für $n \in \mathbb{N}$?

[HÜ 3.4] Zeigen Sie zunächst für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \mathbb{1} + \mathrm{i}\, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \,.$$

Beweisen Sie damit:

$$U(\vec{n}, \alpha) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, \alpha\, S_{\vec{n}}\right) = \mathbb{1}\, \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{i}\, \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \,.$$

Eine Drehung im Ortsraum um die Achse $\vec{n}$ mit einem Winkel α transformiert den Spinzustand $|\psi\rangle$ in $U(\vec{n}, \alpha)|\psi\rangle$.

[HÜ 3.5] Ein im Zustand $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$ präparierter Elektronspin verändert sich durch eine Drehung um die x-Achse mit einem Drehwinkel α in welchen neuen Zustand $|\psi'\rangle$? Was passiert für $\alpha \to 2\pi$?

Aufgabe 4: Radialsymmetrisches Potential (1+1=2 Extrapunkte)

Ein Teilchen bewege sich in einem radialsymmetrischen Potential und werde durch die Wellenfunktion

$$\langle \vec{r}|\psi\rangle = (x + 2y + 3z) f(r)$$

beschrieben. $f(r)$ sei eine beliebige Radialfunktion, sodass $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ gilt.

[HÜ 4.1] Ist $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von L^2? Falls Ihre Antwort „ja" lautet: Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an. Falls Sie die Frage verneinen: Welche Messwerte sind bei einer L^2 Messung möglich?

[HÜ 4.2] Anstatt L^2 messen Sie die z-Komponente des Drehimpulses. Welche Messwerte sind hier möglich? Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?

Aufgabe 5: Zeitentwicklung für das H-Atom (1+1+1=3 Extrapunkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, das zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|2, 1, 1\rangle + |3, 2, 1\rangle\big)$$

präpariert wird.

[HÜ 5.1] Welche Messwerte sind bei einer Energiemessung, einer Messung des Gesamtdrehimpulses und einer Messung der z-Komponente des Drehimpulses zur Zeit $t = 0$ möglich? Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?

[HÜ 5.2] Die Energiemessung ergebe den Wert $E_3 = -\frac{\mathrm{Ry}}{9}$. 10 Sekunden später messen Sie L^2. Welche Messwerte sind nun möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten Sie auf?

[HÜ 5.3] Berechnen Sie die Wellenfunktion zu einer beliebigen Zeit t (ohne dass irgendeine Messung durchgeführt werde). Für welche der vier Operatoren H, X, L_2 und P_2 erwarten Sie bei dem vorliegenden Zustand einen zeitunabhängigen Erwartungswert?

Frohe Festtage und einen guten Rutsch!