Theoretische Physik C **(Abgabe bis 30. Oktober 2020, 23:59)**

Hausübung 2

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

1: Grenzen der klassischen Physik (2 Punkte)

Skizzieren Sie den Versuchsaufbau eines beliebigen in der Vorlesung kennengelernten Experimentes zur Quantentheorie. Beschreiben Sie die Ergebnisse des Versuchs und erläutern Sie, inwiefern sie der klassischen Physik widersprechen.

2: Schwarzkörperstrahlung (2+1.5=3.5 Punkte)

In dieser Aufgabe vollziehen Sie Teile der in der Vorlesung gesehenen Rechnungen nach und ergänzen einige ausgelassene Schritte.

Die elektromagnetische Strahlung eines Schwarzen Körpers erstreckt sich über alle Frequenzen, wobei eine Strahlungsmode bei Frequenz ν eine mittlere Energie $\langle E\rangle(\nu)$ beiträgt und die räumliche Dichte der Strahlungsmoden $n(\nu) = \frac{8\pi}{3}\frac{\nu^3}{c^3}$ ist. Damit berechnet sich die Energiedichte der Strahlung im Frequenzbereich $[\nu, \nu{+}\mathrm{d}\nu]$ zu

$$w(\nu)\,\mathrm{d}\nu \;=\; \langle E\rangle \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu}\,\mathrm{d}\nu \;=\; \frac{8\pi}{c^3}\,\langle E\rangle\,\nu^2\mathrm{d}\nu \;=\; \frac{8\pi}{c^3}\,kT\,\nu^2\mathrm{d}\nu\;,$$

da im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T jede Strahlungsmode die mittlere Energie $\langle E\rangle = kT$ unabhängig von ν enthält. Diese so genannte Rayleigh-Jeans-Formel reproduziert bei kleinen Frequenzen das Experiment richtig, führt aber zur „Ultraviolett-Katastrophe“, da sie bei großen Frequenzen das Wiensche Gesetz nicht wiedergibt und die über alle Frequenzen integrierte Energiedichte $W = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu\, w(\nu)$ offenbar divergiert.

Planck nahm nun an, dass anstatt $\langle E\rangle = kT$ eine diskrete Energie-Verteilung

$$E_n \;=\; n\,\epsilon\;,\quad n = 0,1,2,\ldots \qquad \text{mit Wahrscheinlichkeiten} \qquad p_n \;\propto\; \mathrm{e}^{-E_n/kT}$$

(nach Boltzmann) zu Grunde liegt, wobei er (aus Experimenten) $\epsilon = h\,\nu$ ansetzte.

[**HÜ 2.1**] Bestimmen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle(\nu)$ für diese Verteilung und daraus die Plancksche Formel für $w(\nu)$.

Hinweis: Beachten Sie die Normierung der Wahrscheinlichkeiten.

[**HÜ 2.2**] Berechnen Sie daraus das führende Verhalten für kleine und große Frequenzen. Zeigen Sie die Proportionalität $W \propto T^4$ (Stefan-Boltzmann-Gesetz).

Hinweis: Für den letzten Aufgabenteil müssen Sie kein Integral lösen.

3: Geschwindigkeit auf der Autobahn (2+0.5+1+0.5+0.5=4.5 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Geschwindigkeit v von Fahrzeugen auf der Autobahn sei

$$p(v) = A\, v\, \mathrm{e}^{-\frac{v}{v_0}} \quad \text{mit } 0 \leq v < \infty \text{ und } A, v_0 > 0\,.$$

In anderen Worten, $p(v)\,\mathrm{d}v$ beschreibt also die Wahrscheinlichkeit bei der Geschwindigkeitsmessung eines Autos einen Wert im Intervall $[v, v + \mathrm{d}v]$ zu finden.

[**HÜ 3.1**] Beweisen Sie als technisches Vorspiel für $\alpha > 0$, $z \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ folgende nützliche Identitäten:

$$\int_z^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha z}}{\alpha}\,,$$

$$\int_z^\infty \mathrm{d}x\, x^k \mathrm{e}^{-\alpha x} = k!\, \mathrm{e}^{-\alpha z} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}\, \alpha^{n-k-1}\,.$$

Falls Sie den letzten Aufgabenteil nicht lösen können, rechnen Sie die Relation für $k = 1$ und $k = 2$ nach. Sie erhalten so noch Teilpunkte.

Hinweis: Differenzieren Sie für die zweite Identität die erste k-mal nach α. Sie können die Behauptung dann durch Induktion nach k beweisen.

[**HÜ 3.2**] Ermitteln Sie den Wert von A.

[**HÜ 3.3**] Berechnen Sie den Mittelwert $\langle v \rangle$ der Geschwindigkeit und skizzieren Sie $p(v)$.

[**HÜ 3.4**] Ermitteln Sie den wahrscheinlichsten Wert für die Geschwindigkeit, d.h. den Wert, der $p(v)$ maximiert.

[**HÜ 3.5**] Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Auto mindestens dreimal so schnell fährt wie der Mittelwert?