Theoretische Physik C **(Abgabe bis 6. November 2020, 23:59)**

Hausübung 3

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Quantum mechanical interaction-free measurements (6 Punkte)

In dieser Hausübung werden Sie unter Anleitung den wissenschaftlichen Artikel lesen, der dem in der Vorlesung kennengelernten Bombentest zugrunde liegt. Neben Erklärungen und Kommentaren gibt es zur Verdeutlichung fett markierte Fragen und Arbeitsanweisungen, die Sie schriftlich bearbeiten. Den Artikel können Sie aus dem Uni-Netz kostenfrei hier herunterladen:

https://link.springer.com/article/10.1007/BF00736012

Für eine vollständige und korrekte Bearbeitung der Aufgabe erhalten Sie 6 Punkte. Eventuell werden Sie für einige Aufgaben auch zusätzliche Quellen benötigen, führen Sie in diesem Fall selbstständig die Recherche durch.

Lesen Sie die Einleitung (Kapitel 1). **Was versteht man unter einer nicht-lokalen Messung? Nennen Sie Beispiele aus der klassischen Physik und der Quantenmechanik für nicht-lokale Messungen! Was unterscheidet den von den Autoren entwickelten Ansatz von den bisherigen, zuvor genannten, Methoden?**

In Kapitel 2 wird der Versuchsaufbau beschrieben. Abweichend von dem in bisherigen Übungen und Vorlesung diskutierten Modell, wird hier für alle Spiegel (halbdurchlässig und versilbert) eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ angenommen. **Zeigen Sie, dass diese Annahme keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.** Beachten Sie, dass der Zustand $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|i\rangle$ mit $i = 1, 2$ hier die Bewegungsrichtung des Photons beschreibt (und nicht wie in der Vorlesung die Polarisation). $|1\rangle$ entspricht einem sich nach rechts bewegenden Photon, $|2\rangle$ einem sich nach oben bewegenden. Ein Phasenfaktor $\mathrm{e}^{i\phi}$ wird zum Modellieren der Phasensprünge an den Spiegeln benutzt. **Was beschreibt der Zustand $|\text{scattered}\rangle$? Erklären Sie in eigenen Worten die in Gleichung (4) und (5) dargestellten physikalischen Vorgänge. Inwiefern handelt es sich hier um eine wechselwirkungsfreie Messung?**

In Kapitel 3 wird eine Situation beschrieben, bei dem ein Teilchen sich in einem Superpositionszustand $|\psi\rangle = \alpha|A\rangle + \beta|B\rangle$ befindet. Die beiden Zustände $|A\rangle$ und $|B\rangle$ sind lokalisiert in zwei verschiedenen Regionen A und B. Mithilfe des Versuchsaufbaus soll nun untersucht werden, ob sich das Teilchen im Gebiet A oder B befindet. Der gemeinsame Anfangszustand des Teilchens und des zur Untersuchung verwendeten Photons wird im Artikel als $|1\rangle|\psi\rangle$ bezeichnet. Es handelt sich hierbei um einen Produktzustand, genauer um einen Vektor aus dem Tensorprodukt des Zustandsraumes des Photons und des betrachteten Teilchens. Da dies aber in der Vorlesung noch nicht behandelt wurde und für das Verständnis des weiteren Textes nicht unbedingt nötig ist, können Sie Kapitel 3 auslassen, wenn Sie möchten.

Kapitel 4 wurde zu großen Teilen sehr ähnlich auch in der Vorlesung behandelt. **Erklären Sie, mit welcher Strategie die Effektivität des Bombentests optimiert werden kann. Welche Vor- und Nachteile hat die vorgeschlagene Modifikation?**

Aufgabe 2: Lineare Operatoren (1.5+1+1.5=4 Punkte)

Wie in der Präsenzübung betrachten wir den Hilbertraum $\mathbb{C}^2$. In dieser Aufgabe untersuchen Sie lineare Operatoren (=lineare Abbildungen). Die hier untersuchten Operatoren sind, wie Sie in der Vorlesung lernen werden, in der Quantenmechanik zur Beschreibung von Spinmessungen notwendig.

Bezüglich der Orthonormalbasis $\{|\uparrow\rangle = \text{'Spin-up'}\,,\, |\downarrow\rangle = \text{'Spin-down'}\}$ seien die Operatoren

$$S_x \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad S_y \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_z \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

[HÜ 2.1] Überführen Sie die Operatoren in Bra-Ket Notation, d.h. schreiben Sie (für $\alpha = x, y, z$)

$$S_\alpha = \sum_{i,j\in\{\uparrow,\downarrow\}} c_{ij}|i\rangle\langle j|$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten c_{ij}.

Hinweis: Ein ähnliches Vorgehen wie in **[PÜ 1.3]** *erlaubt es Ihnen die Koeffizienten c_{ij} zu bestimmen.*

[HÜ 2.2] Die (orthonormalen) Eigenvektoren von S_x sind gegeben durch

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \quad \text{und} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)\,.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

[HÜ 2.3] Fügen Sie ähnlich wie in **[PÜ 1.5]** zwei Identitätsoperatoren ein, um S_α ($\alpha = 1, 2, 3$) bezüglich der Orthonormalbasis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ darzustellen, d.h. schreiben Sie

$$S_\alpha = \sum_{i,j\in\{+,-\}} d_{ij}|i\rangle\langle j|$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten d_{ij}.