Theoretische Physik C **(Abgabe bis 17. Dezember 2020, 23:59)**

Hausübung 9

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Geladenes Teilchen im E-Feld (1+2+2=5 Punkte)

Ein geladenes Teilchen (Ladung q, Masse m) befindet sich in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential. Zusätzlich wird ein konstantes elektrisches Feld $\mathcal{E} > 0$ angelegt. Der Hamilton-Operator ist dann durch

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 - q\mathcal{E}X$$

gegeben.

[HÜ 1.1] Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von H.

Hinweis: Versuchen Sie das Problem auf den eindimensionalen Oszillator ohne externes Feld zurückzuführen. Sollten Sie diese Aufgabe nicht lösen können, rechnen Sie in den weiteren Teilaufgaben mit der aus der Vorlesung bekannten Lösung für den harmonischen Oszillator ohne elektrisches Feld.

[HÜ 1.2] Berechnen Sie für ΔX und ΔP für einen beliebigen Eigenzustand $|n\rangle$ des Hamilton-Operators und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation gilt.

[HÜ 1.3] Zur Zeit $t = 0$ werde der Zustand $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}\left(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle\right)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ präpariert. Bestimmen Sie $\mathcal{N}$, sodass der Zustand normiert ist. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$ und damit $\langle X\rangle(t)$ und $\langle P\rangle(t)$ in Abhängigkeit von θ.

Aufgabe 2: Kohärente Zustände (2+2+1=5 Punkte)

Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem Eigenzustand $|\alpha\rangle$ des Vernichtungsoperators,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \text{für ein} \quad \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

[HÜ 2.1] Bestimmen Sie diesen Eigenzustand, indem Sie $|\alpha\rangle$ nach den Energieeigenfunktionen $|n\rangle$ entwickeln und die Entwicklungskoeffizienten berechnen. Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung des Zustands gegeben ist durch

$$|\alpha\rangle(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t/2}|\alpha(t)\rangle \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

[HÜ 2.2] Normieren Sie den Zustand $|\alpha(t)\rangle$ und berechnen Sie den Erwartungswert $\langle N(t)\rangle$.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $W_n(t)$ an dafür, dass sich der Oszillator im n-ten Energieeigenzustand befindet, und drücken Sie diese als Funktion von $\langle N(t) \rangle$ aus.

[HÜ 2.3] Betrachten Sie $\langle H \rangle$ für große $\langle N \rangle$. Welche Größe lässt sich im Vergleich zur klassischen Theorie als Amplitude der Schwingung interpretieren?