Theoretische Physik C **(26. Januar 2021)**

Präsenzübung 13

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Statistische Ensembles

Vergleichen Sie das mikrokanonische, kanonische und großkanonische Ensemble. Welche Größen sind jeweils von außen vorgegeben? Wie lauten die Zustandssummen und welche Bedeutung haben die darin vorkommenden Größen?

Aufgabe 2: Lagrange-Multiplikatoren

Ein typisches Optimierungsproblem ist, die Extrempunkte einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ von n Variablen zu finden. Oft treten dabei Nebenbedingungen der Form $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ auf.

Nehmen Sie an, dass Sie insgesamt M solcher Nebenbedingungen haben. Zur Lösung des Problems definieren wir die Funktion

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_M) := f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, g_i(x_1, \dots, x_n)\,,$$

wobei wir die *Lagrange-Multiplikatoren* λ_i eingeführt haben. Man kann zeigen, dass eine notwendige Bedingung für das vorliegen eines Extrempunktes durch

$$\nabla \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_M) \overset{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \right)$$

gegeben ist.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel aus der Geometrie. Die Gleichung $2x^2 - 4x + y^2 = 16$ beschreibt eine Ellipse in der xy-Ebene. Berechnen Sie die Punkte auf der Ellipse mit extremalem Abstand vom Ursprung.

Hinweis: In diesem Fall ist $n = 2$ und $M = 1$. Stellen Sie zunächst die Abstandsfunktion auf und definieren Sie $g(x, y)$, sodass Sie die oben stehende Methode anwenden können.

Aufgabe 3: Wiederholungsaufgaben

Die folgenden Fragen sollen das Verständnis des alten Stoffes prüfen und sind meist durch wenige Sätze oder kurze Rechnungen zu beantworten.

- Wo liegen im Minkowskiraum die Punkte mit Vierer-Abstand Null zum Ursprung?
- Welche der Größen sind Lorentz-invariant: Energie E, Drehimpuls^2 $\vec{L}^2$, Eigenzeit τ?
- Welche Eigenschaft der Schrödingergleichung garantiert das Superpositionsprinzip?

- Der Hamilton-Operator eines Quantensystems sei $H = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|$. Welche Energiemesswerte sind möglich? Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie bei einer Messung am Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}(2|1\rangle + 3|2\rangle)$ auf?
- Unter den Bedingungen der vorherigen Aufgabe sei $|\psi\rangle$ der zur Zeit $t = 0$ präparierte Zustand. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$.
- Drehimpulseigenzustände: $L_+|\ell\,\ell\rangle\ = ?$ und $L_z|\ell\,\ell\rangle\ = ?$
- Welche Zustände $|n\,\ell\,m\rangle$ sind im Coulomb-Potential bei $E = -\frac{\mathrm{Ry}}{4}$ entartet?