

## Präsenzübung 6

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

**Aufgabe 1: Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild**

[PÜ 1.1] Betrachten Sie ein Quantensystem zeitunabhängigem Hamilton-Operator  $H$ . Vergleichen Sie tabellarisch Schrödinger- und Heisenberg-Bild. Geben Sie dabei an, wie die Zeitentwicklung von Zuständen, Operatoren und Erwartungswerten aussieht.

[PÜ 1.2] Zeigen Sie, dass ein im Schrödinger-Bild zeitunabhängiger Operator  $A$  die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A_H(t)] \quad \text{für} \quad A_H(t) = U^\dagger(t)AU(t)$$

erfüllt.

**Aufgabe 2: Zeitentwicklung im Schrödinger-Bild**

Betrachten Sie eine analytische Funktion  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ . Für einen Operator  $A$  definiert man  $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ , wobei wir  $A^0 = \mathbb{1}$  setzen.

[PÜ 2.1] Es sei  $H$  der Hamilton-Operator eines Quantensystems (orthonormierte Eigenvektoren  $|i\rangle$ , Eigenwerte  $E_i$ ). Zeigen Sie, dass dann  $f(H)|i\rangle = f(E_i)|i\rangle$  gilt.

[PÜ 2.2]  $H$  sei wiederum zeitunabhängig. Wie sieht dann der Zeitentwicklungsoperator  $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tH)$  bezüglich der Eigenbasis von  $H$  aus?

[PÜ 2.3] Das System werde zur Zeit  $t = 0$  im Zustand  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$  präpariert. Nutzen Sie den Zeitentwicklungsoperator, um  $|\psi(t)\rangle$  für  $t > 0$  zu berechnen.

**Aufgabe 3: Wellenfunktionen**

In der Vorlesung haben Sie die quantenmechanische Beschreibung eines Punktteilchens in einer Raumdimension diskutiert. Wir wiederholen hier einige der Rechnungen und betrachten ein konkretes Beispiel.

Dazu vereinfachen wir die Situation noch weiter und nehmen an, dass das Teilchen im Intervall  $[0, \pi]$  eingesperrt sei.

Dies hat zur Folge, dass unser Teilchen durch Zustände beschrieben wird, die  $\psi(0) = 0 = \psi(\pi)$  erfüllen. Hierbei ist wie in der Vorlesung  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ .

[PÜ 3.1] Es sei  $|n\rangle$  eine abzählbare (d.h.  $n = 1, 2, \dots$ ) Orthonormalbasis des Zustandsraumes. Drücken Sie  $|\psi\rangle$  in dieser Basis aus. Werten Sie die dabei auftretenden Skalarprodukte in Ortsdarstellung aus, indem Sie  $\mathbf{1} = \int dx |x\rangle\langle x|$  einsetzen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Fall eines endlich dimensionalen Zustandsraumes.

[PÜ 3.2] Wir betrachten als konkrete Anwendung die durch  $\langle x|n\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$  definierte Orthonormalbasis.

Wir präparieren unser Teilchen nun im Zustand  $|\psi\rangle$  mit  $\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{5\pi}} \sin^3(x)$ . Entwickeln Sie  $|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\psi_n$  nach der gegebenen Basis.

*Hinweis: Es tragen hier nur die ersten drei Basisvektoren etwas bei. Sie können*

$$\begin{aligned} \int_0^\pi dx \sin(x) \sin(x)^3 &= \frac{3\pi}{8} \\ \int_0^\pi dx \sin(2x) \sin(x)^3 &= 0 \\ \int_0^\pi dx \sin(3x) \sin(x)^3 &= -\frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

*verwenden..*

[PÜ 3.3] Berechnen Sie den Erwartungswert für eine Ortsmessung:  $\langle X \rangle = \langle \psi | X | \psi \rangle$ .

*Hinweis:  $\int_0^\pi dx x \sin(x)^6 = \frac{5\pi^2}{32}$*