Theoretische Physik C **(8. Dezember 2020)**

Präsenzübung 8

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Parität

[**PÜ 1.1**] Der Paritätsoperator Π ist durch seine Wirkung auf Ortswellenfunktionen definiert: $(\Pi\psi)(x) = \psi(-x)$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von Π.

[**PÜ 1.2**] Für einen Hamilton-Operator gelte $[H, \Pi] = 0$. Inwiefern vereinfacht sich dadurch die Diagonalisierung von H?

Aufgabe 2: Das δ-Potential

Ein (sehr stark vereinfachtes) Atommodell in einer Dimension ist die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem attraktiven δ-Potential $V(x) = -V_0\,\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

[**PÜ 2.1**] Diskutieren Sie, inwiefern das δ-Potential als Spielzeugmodell eines Atoms gesehen werden kann. Wodurch werden hier Elektron und Kern dargestellt? Wie sieht der Hamilton-operator H in Ortsdarstellung aus?

[**PÜ 2.2**] Wir wollen nun die (gebundenen) Eigenzustände des Hamiltonoperators H finden, also solche mit Energie $E < 0$. Zeigen Sie zunächst, dass die Ableitung der Wellenfunktion eines beliebigen Eigenzustandes von H bei $x = 0$ unstetig ist. Welche weiteren Randbedingungen müssen Sie berücksichtigen?

Integrieren Sie dazu die stationäre Schrödingergleichung in Ortsdarstellung

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (H\,\psi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\,\psi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nutzen Sie die definierende Eigenschaft der δ-Funktion und prüfen Sie, was sich für $\epsilon \to 0$ ergibt.

[**PÜ 2.3**] Zeigen Sie, dass es genau einen gebundenen Zustand gibt und bestimmen Sie ihn in Ortsdarstellung. Erstellen Sie einen Plot der Wahrscheinlichkeitsdichte für Ortsmessungen.

Aufgabe 3: Vakuumsenergie?

Leiten Sie mit Hilfe der Unschärferelation $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ für den harmonischen Oszillator,

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \ ,$$

in einem stationären Zustand ($\langle X \rangle = \langle P \rangle = 0$) eine untere Grenze für die Energie her.
Hinweis: Drücken Sie $\langle H \rangle$ *durch* $\langle X^2 \rangle$ *aus und minimieren Sie bezüglich* $u := \langle X^2 \rangle$.