



Superkonforme Vielteilchenmechanik und die WDVV-Gleichungen

Diplomarbeit
an der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Johannes Thürigen
aus Potsdam

Hannover, 16. Februar 2010

Betreuer: Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld (Leibniz Universität Hannover)

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Peter Mayr

Zweiter Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Ralph Blumenhagen

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Johannes Thürigen

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Superkonforme Quantenmechanik	5
2.1. Konforme Quantenmechanik	5
2.2. Superkonforme Quantenmechanik	8
2.3. SCQM und Schwarze Löcher	11
3. Die Struktur der WDVV-Gleichungen	15
3.1. Die WDVV-Gleichungen in $\mathcal{N} = 4$ SCQM	15
3.2. Die verallgemeinerten WDVV-Gleichungen und ihre Geometrie	19
3.3. Algebraisierung der WDVV-Gleichungen	23
3.4. Die Projektorgleichung	27
3.5. Äquivalenz zur Veselovschen \vee -Bedingung	29
4. Lösungen der WDVV-Gleichungen	33
4.1. Wurzelsysteme von Coxeter-Gruppen	33
4.2. Deformierte und verallgemeinerte Wurzelsysteme	38
4.3. Restriktionen von Lösungssystemen	41
5. Polytope, Hypergraphen und Matroide	45
5.1. WDVV-Lösungen als Polytope	45
5.2. Kombinatorik von Lösungen als Hypergraphen	52
5.3. Matroide	56
5.4. Vererbung von Matroideigenschaften	61
5.5. Klassifikation von Matroiden	64
6. Zusammenfassung und Ausblick	67
A. Lösungssysteme und Matroide	71
A.1. Projektorgleichung und Matroide mit Mathematica	71

A.2. Die Matroide der Lösungssysteme	74
A.3. Klassifikation der einfachen \mathbb{R} -Vektormatroide für $p \leq 8$. .	76
References	78
Danksagung	85

KAPITEL 1

EINLEITUNG

The motivation for a physicist to study 1-dimensional problems is best illustrated by the story of the man who, returning home late at night after an alcoholic evening, was scanning the ground for his key under a lamppost; he knew, to be sure, that he had dropped it somewhere else, but only under the lamppost was there enough light to conduct a proper search. - F. Calogero [Ca71]

Von besonderem Interesse für die verschiedensten Bereiche der Physik sind vollständig integrable Modelle. Prinzipiell sind schon mechanische Systeme mit drei oder mehr Körpern im Allgemeinen nicht exakt lösbar. Dennoch gibt es eine Reihe lösbarer Spezialfälle. In der Quantenmechanik wurde Anfang der 1970er Jahre mit dem Calogero-Modell ein integrables Modell gefunden, welches n Teilchen auf einer Geraden, also in einer Dimension mit paarweiser Wechselwirkung beschreibt [Ca71]. So simpel dies zunächst klingen mag, so breit ist doch sein Anwendungsspektrum von Festkörperphysik bis zur Physik schwarzer Löcher. Aber auch und gerade als integrables Quantenmodell ist es Ausgangspunkt für eine Vielzahl von Verallgemeinerungen zu neuen integrablen Systemen; dabei spielen vor allem Wurzelsysteme von Lie-Algebren als zugrundeliegende Struktur solcher Modelle eine große Rolle [OIPe83]. Entsprechend naheliegend ist auch der Versuch, die Calogero-Modelle supersymmetrisch zu erweitern, was schon vor 20 Jahren für $\mathcal{N} = 2$ erweiterte Supersymmetrie in Angriff genommen wurde [FrMe90].

Supersymmetrische Quantenmechanik war im Gegensatz zu supersymmetrischer Quantenfeldtheorie jedoch lange ein wenig studiertes Gebiet. Dies änderte sich deutlich, nachdem sich herausstellte, dass gewisse Aspekte der M-Theorie im Zugang über Matrix-Modelle durch Quantenmechanik

beschrieben [BFSS96] und dass über die AdS/CFT-Korrespondenz Probleme in AdS₂-Geometrien dual auch in konformer Quantenmechanik angegangen werden können [Ma98]. Insbesondere führen verschiedene Zugänge zur Physik schwarzer Löcher im Rahmen der String-Theorie auf superkonforme Erweiterungen der Calogero-Modelle [CDKKT98] und es wurde vermutet, dass von besonderem Interesse die $\mathcal{N} = 4$ Erweiterung mit $SU(1,1|2)$ -Symmetrie ist [GiTo98].

Die allgemeine Konstruktion einer solchen Vielteilchen-Quantenmechanik [Wy00, BeGL04] führt auf zwei Präpotentiale U und F , aus welchen sich das Potential im Hamilton-Operator ableiten lässt und welche auf diese Weise die Modelle bestimmen. Sie unterliegen allerdings aufgrund der $\mathcal{N} = 4$ superkonformen Symmetrie einem Satz nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen. Dabei ist das Präpotential F unabhängig von U Lösung einer speziellen Form der sogenannten Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde-Gleichung (WDVV) aus der zweidimensionalen topologischen Feldtheorie [Wi90, DVV91] und U für ein gegebenes F dann Lösung einer linearen Differentialgleichung.

Die bisher im Rahmen der superkonformen Vielteilchenmechanik betrachteten Lösungen der WDVV-Gleichungen beruhen auf Wurzelsystemen von Lie-Algebren beziehungsweise, etwas allgemeiner, endlicher Coxeter-Gruppen und Deformationen von diesen und es existieren auch für bis zu vier Teilchen entsprechende Lösungen für U [GLP09, KLP09]. Allerdings sind aus dem Kontext der Seiberg-Witten-Theorie und motiviert durch Lösungssysteme ähnlicher Gestalt in Calogero-Moser-Theorie von A.P. Veselov und anderen darüber hinaus auch WDVV-Lösungen für Wurzelsysteme von Lie-Superalgebren [ChVe01, Ve02] und aus Projektionen solcher Systeme gefunden worden [FeVe07, FeVe08]. Mit den sogenannten \vee -Systemen [Ve99, Ve01] wird dazu ein eigenes Konzept verwendet.

In dieser Arbeit wird der Zusammenhang der WDVV-Lösungen in der $\mathcal{N} = 4$ superkonformen Vielteilchenmechanik zu diesen \vee -Systemen geklärt, so dass auch den verallgemeinerten Wurzelsystemen und Projektionen auf eindeutige Weise superkonforme Modelle zugeordnet werden können. Aufbauend auf [Le08b, Le08a] werden diese Lösungssysteme außerdem geometrisch interpretiert. Dabei zeigt sich, dass die Interpretation der Lösungssysteme als Polytope in gewissen Fällen von Vorteil ist, als allgemeines Klassifikationsprinzip aber bei den Veselovschen Projektionen

an seine Grenzen stößt. Indem die Kombinatorik der linearen Abhängigkeiten in den Lösungssystemen in den Mittelpunkt gestellt wird, erweist es sich stattdessen als sinnvoll, die WDVV-Lösungen mithilfe von Hypergraphen beziehungsweise Matroiden zu beschreiben. Auf diese Weise lassen sich die bekannten Lösungen auf eine neue Art geometrisch verstehen und klassifizieren, wobei die besondere Schwierigkeit in einer zu erfüllenden Orthogonalitätseigenschaft liegt. Außerdem werden Wege aufgezeigt, wie man prinzipiell zu neuen Lösungen der WDVV-Gleichungen gelangen kann.

Der Aufbau dieser Arbeit ist daher folgendermaßen. Im Kapitel 2 wird die $\mathcal{N} = 4$ superkonforme Vielteilchenmechanik eingeführt und es wird angerissen, auf welche Weise diese die Physik schwarzer Löcher nahe ihrem Horizont beschreiben könnte.

Im Kapitel 3 werden die Strukturgleichungen für die Präpotentiale U und F genauer betrachtet, ihr Zusammenhang mit den WDVV-Gleichungen aus dem Kontext der Seiberg-Witten-Theorie erläutert und ihre Geometrie analysiert. Des Weiteren wird gezeigt, wie sich die Strukturgleichungen in einem speziellen Lösungsansatz zu algebraischen Gleichungen vereinfachen und auf welche Weise diese äquivalent zu sogenannten Projektorgleichungen und zur definierenden Bedingung der Veselovschen \vee -Systeme sind.

Daraufhin wird im Kapitel 4 demonstriert, dass Wurzelsysteme die WDVV-Gleichungen lösen und es wird ein vollständiger Überblick über die bislang bekannten Lösungssysteme der verschiedenen Typen gegeben.

Schließlich wird im Kapitel 5 ausgeführt, wo die Stärken und Schwächen der Polytopinterpretation liegen. Dann werden die Begriffe des Hypergraphen und des Matroids nacheinander eingeführt und untersucht, wie die WDVV-Lösungen durch sie beschrieben werden können. Insbesondere wird aufgezeigt, wie sich prinzipiell durch die Matroidoperationen der Kontraktion und unter gewissen Umständen auch der Löschung aus gegebenen Lösungen weitere Lösungen ergeben. Schließlich werden neue Klassifikationsstrategien vorgestellt.

KAPITEL 2

SUPERKONFORME QUANTENMECHANIK

Zu Beginn soll die $\mathcal{N} = 4$ erweitert superkonforme Vielteilchenmechanik vorgestellt werden, in welcher die WDVV-Gleichungen auftauchen. Dazu wird zunächst demonstriert, wie man zu Calogero-Modellen als Vielteilchenmodellen konformer Quantenmechanik gelangt. Dann werden die supersymmetrischen Erweiterungen eingeführt, deren Einschränkungen an das Potential durch Strukturgleichungen für Präpotentiale bestimmt sind. Schließlich soll angedeutet werden, inwiefern die Vermutung besteht, dass solche superkonformen Modelle die Physik extremaler schwarzer Löcher vom Reissner-Nordström-Typ am Ereignishorizont beschreiben.

2.1. Konforme Quantenmechanik

Die Grundlegende Arbeit zur konformen Quantenmechanik stammt von de Alfaro, Fubini und Furlan (DFF) [DFF76]. Aus generellem Interesse an Quantenfeldtheorien mit konformer Symmetrie $SO(1, d + 1)$, beschrieben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - g\phi^{\frac{2d}{d-2}}, \quad (2.1.1)$$

wird die konforme Quantenmechanik als nichttrivialer aber integrierbarer Spezialfall lediglich einer (Raum)Zeitdimension $d = 1$ betrachtet. Dann ist $\phi(x^\mu) \rightarrow x(t)$ und die Lagrangedichte (2.1.1) wird zur Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \frac{g}{x^2}). \quad (2.1.2)$$

Für dieses einfache Modell lässt sich die konforme Algebra $so(1, 2)$,

$$[H, K] = 2i\hbar D, \quad [D, H] = -i\hbar H, \quad [D, K] = i\hbar K, \quad (2.1.3)$$

auf dem Konfigurationsraum darstellen durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \frac{g}{x^2}) \quad (2.1.4)$$

sowie dem symmetrisierten Dilatationsoperator

$$D = \frac{1}{4}(x\dot{x} + \dot{x}x) \quad (2.1.5)$$

und dem Generator der speziellen konformen Transformationen

$$K = -\frac{1}{2}t(x\dot{x} + \dot{x}x) + \frac{1}{2}x^2. \quad (2.1.6)$$

Dabei legt man wie üblich die kanonische Quantisierung

$$[x(t), p(t)] = i\hbar \quad (2.1.7)$$

mit dem kanonischen Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$ zugrunde.

Interessant ist für DFF die Integrierbarkeit: Durch die Operatoren kompakter Drehungen $R = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}K + aH)$ der konformen Symmetrie, welche ein diskretes Spektrum und normalisierbare Eigenzustände besitzen, können die Lösungen der Bewegungsgleichungen generiert werden. Der Hamiltonoperator gehört jedoch nicht zu diesen, sondern bildet den Grenzfall $a \rightarrow \infty$ zu den nichtkompakten Generatoren hyperbolischer Transformationen $S = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}K - aH)$.

Eine interessante Verallgemeinerung des DFF-Modells (2.1.4) erhält man, wenn man den generischen Hamiltonoperator für n identische Partikeln in einer Dimension

$$H = \frac{1}{2}p_i p_i + V_B(x^1, \dots, x^n) \quad (2.1.8)$$

betrachtet und zusätzlich konforme Symmetrie fordert. (In der gesamten Arbeit soll die Einsteinsche Summenkonvention für die Teilchenindizes $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$ gelten.) Invarianz unter der konformen Algebra $so(1, 2)$ lässt sich nun durch Invarianz unter der formalen Algebra (2.1.3) von DFF fordern. Entsprechend der üblichen kanonischen Quantisierung

$$[x^i, p_j] = i\hbar \delta_j^i \quad (2.1.9)$$

kann diese Algebra mittels

$$D = -\frac{1}{4}(x^i p_i + p_i x^i) \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{2}x^i x^i \quad (2.1.10)$$

dargestellt werden. Allerdings erfordert diese Invarianz eine Einschränkung des Potentials V_B . Als illustratives Beispiel für die Bestimmung von quantenmechanischen Modellen einer gewissen Symmetrie soll dies hier explizit gerechnet werden: Aufgrund des Kommutators

$$\begin{aligned} [D, H] &= \frac{1}{4}[H, x^i p_i + p_i x^i] = \frac{1}{4}(x^i [H, p_i] + [H, x^i] p_i + p_i [H, x^i] + [H, p_i] x^i) \\ &= \frac{1}{4}(x^i [V_B, p_i] + [V_B, p_i] x^i) + \frac{1}{8}([p_j p_j, x^i] p_i + p_i [p_j p_j, x^i]) \\ &= \frac{1}{4}(x^i i\hbar \partial_i V_B + i\hbar (\partial_i V_B) x^i) - \frac{1}{8}(2p_j i\hbar \delta_j^i p_i + 2p_i p_j i\hbar \delta_j^i) \\ &= i\hbar \frac{1}{2}(x^i \partial_i V_B + 2V_B) - i\hbar \left(\frac{1}{2} p_i p_i + V_B\right) = -i\hbar H + \frac{i\hbar}{2}(x^i \partial_i + 2)V_B \end{aligned}$$

muss zur Erfüllung der konformen Algebra gelten $(x^i \partial_i + 2)V_B = 0$. Das Potential V_B muss also homogen vom Grad -2 sein, damit man eine konforme Vielteilchen-Quantenmechanik erhält. Das prominente Beispiel ist hierfür das *Calogero-Modell* [Ca71] mit

$$V_B = \sum_{i < j} \frac{g^2}{(x^i - x^j)^2}, \quad (2.1.11)$$

welches eindeutig durch die weitere Forderung nach Translations- sowie Permutationsinvarianz und eine Beschränkung auf Zweiteilchen- Wechselwirkung bestimmt ist. Indem man den Nenner $(x^i - x^j)^2$ der Summanden des Calogero-Potentials (2.1.11) als Quadrat der Wirkung einer Wurzel aus dem Wurzelsystem A_n auf die Koordinaten x auffasst, bietet sich die Verallgemeinerung des Spezialfalls A_n auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren an und es lässt sich zeigen, dass diese integrable Modelle der Vielteilchenmechanik beschreiben [OLPe83]. Man spricht dann auch allgemein von Calogero-Modellen. Insbesondere haben all diese Modelle Potentiale der richtigen Homogenität und sind daher konform invariant.

2.2. Superkonforme Quantenmechanik

Im nächsten Schritt sollen supersymmetrische Erweiterungen der konformen Vielteilchenmechanik (SCQM) betrachtet werden. Dabei wird im Folgenden $\hbar = 1$ gesetzt.

In der Quantenmechanik als Quantenfeldtheorie in $0 + 1$ Dimensionen reduziert sich die Poincaré-Symmetrie auf Zeittranslation, der einzige Generator ist der Hamilton-Operator. Entsprechend besteht die eindimensionale unerweiterte Supersymmetrie-Algebra lediglich aus einer Superladung und dem Hamilton-Operator:

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2H, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad [H, Q] = 0. \quad (2.2.1)$$

Für eine Darstellung auf dem Hilbertraum der n -Teilchenmechanik muss dieser zunächst um fermionische Freiheitsgrade $\psi^i, \bar{\psi}^i$ für eine jede Ortskoordinate x^i erweitert werden, $i = 1, \dots, n$. Diese sollen die kanonischen Antivertauschungsrelationen

$$\{\psi^i, \bar{\psi}^j\} = \delta^{ij} \quad \text{und} \quad [x^i, \psi^j] = [x^i, \bar{\psi}^j] = 0 \quad (2.2.2)$$

erfüllen. Um die Superalgebra auf diesem Raum darzustellen, bietet sich zunächst der Ansatz

$$Q = \psi^i p_i \quad \bar{Q} = \bar{\psi}^i p_i \quad (2.2.3)$$

an, da

$$\{Q, \bar{Q}\} = \{\psi^i p_i, \bar{\psi}^j p_j\} = \psi^i \bar{\psi}^j p_i p_j + \psi^j \bar{\psi}^i p_i p_j \quad (2.2.4)$$

$$= \{\psi^i, \bar{\psi}^j\} p_i p_j = p_i p_i = 2H_0. \quad (2.2.5)$$

Für die supersymmetrische Erweiterung der konformen Quantenmechanik kommen solche Supersymmetrie-Algebren in Frage, die im bosonischen Teil die obige konforme Algebra (2.1.3) als Unter algebra enthalten. Dazu werden zusätzlich zu den Superladungen Q fermionische Generatoren S mit Antikommutator proportional zum Generator der speziellen konformen Transformationen K benötigt. Sie werden daher als superkonforme Partner der Q bezeichnet.

Für den $\mathcal{N} = 2$ erweiterten Fall hat die Algebra beispielsweise die Gestalt

$$\begin{aligned}
[H, D] &= iH & [K, D] &= -iK & [H, K] &= 2iD \\
\{Q, \bar{Q}\} &= 2H & \{S, \bar{S}\} &= 2K & \{Q, \bar{S}\} &= -2D - 2iJ + iC \quad (2.2.6) \\
[Q, D] &= \frac{i}{2}Q & [S, D] &= -\frac{i}{2}S & [S, H] &= iQ \\
[Q, J] &= -\frac{1}{2}Q & [S, J] &= -\frac{1}{2}S & [Q, K] &= -iS,
\end{aligned}$$

wobei die fermionischen Generatoren in zueinander hermitesch konjugierten Paaren Q, \bar{Q} beziehungsweise S, \bar{S} auftreten. Außerdem hat man im Allgemeinen einen $u(1)$ -Generator J sowie eine reelle zentrale Ladung C .

Für die Darstellung dieser Algebra auf dem Hilbertraum der wechselwirkungsfreien n -Teilchen-Quantenmechanik bietet sich analog zu (2.2.3) für die superkonformen Generatoren an

$$S = \psi^i x^i \quad \bar{S} = \bar{\psi}^i x^i \quad (2.2.7)$$

und für den $u(1)$ -Generator

$$J = \frac{1}{4}(\psi^i \bar{\psi}^i - \bar{\psi}^i \psi^i). \quad (2.2.8)$$

Letztlich soll in dieser Arbeit jedoch $\mathcal{N} = 4$ erweiterte Supersymmetrie untersucht werden. Genauer gesagt soll die Superalgebra $su(1, 1|2)$

$$\begin{aligned}
[H, D] &= iH & [K, D] &= -iK \\
[H, K] &= 2iD & [J_a, J_b] &= i\epsilon_{abc}J_c \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} &= 2H\delta_\alpha^\beta & \{S_\alpha, \bar{S}^\beta\} &= 2K\delta_\alpha^\beta \\
[Q_\alpha, D] &= \frac{i}{2}Q_\alpha & [S_\alpha, D] &= -\frac{i}{2}S_\alpha \quad (2.2.9) \\
[Q_\alpha, J_a] &= -\frac{1}{2}(\sigma_a)_\alpha^\beta Q_\beta & [S_\alpha, J_a] &= -\frac{1}{2}(\sigma_a)_\alpha^\beta S_\beta \\
[Q_\alpha, K] &= -iS_\alpha & [S_\alpha, H] &= iQ_\alpha \\
\{Q_\alpha, \bar{S}^\beta\} &= -2D\delta_\alpha^\beta - 2i(\sigma_a)_\alpha^\beta J_a + iC\delta_\alpha^\beta
\end{aligned}$$

gefordert werden [GLP09], wobei die durch die J_a generierte R-Symmetrie hier eine $SU(2)$ ist, dargestellt mit den Paulimatrizen (σ_a) , $a = 1, 2, 3$. Entsprechend sind die Superladungen Q_α und deren superkonforme Partner

S_α nun $SU(2)$ -Doublets, $\alpha = 1, 2$, mit den Hermitizitätsbedingungen

$$(Q_\alpha)^\dagger = \bar{Q}^\alpha \quad , \quad (S_\alpha)^\dagger = \bar{S}^\alpha. \quad (2.2.10)$$

Für eine Vielteilchenmechanik-Darstellung wird der Konfigurationsraum um zusätzliche fermionische Freiheitsgrade ψ_α^i und $\bar{\psi}^{\alpha i}$ erweitert und die Generatoren werden mit der Ausnahme von

$$J_a = \frac{1}{2} \bar{\psi}^{\alpha i} (\sigma_a)^\beta_\alpha \psi_\beta^i \quad (2.2.11)$$

vollkommen analog zum Fall $\mathcal{N} = 2$ dargestellt.

Analog zur Untersuchung der konformen Modelle ohne Supersymmetrie im letzten Abschnitt erhält man aus der Forderung, dass die darzustellenden Algebren auf dem Konfigurationsraum schließen, nun Einschränkungen an das Potential V eines Modells. Im Gegensatz zu den unerweiterten konformen Modellen ist bei den supersymmetrischen eine V -abhängige Modifikation der Darstellung der Supergeneratoren Q nötig.

Im Fall der $\mathcal{N} = 2$ erweiterten Algebra (2.2.6) erhält man so [GLP06] zusätzlich zum bosonischen Potential V_B eine fermionische Erweiterung

$$V_F = -(\partial_i \partial_j U) \psi^i \bar{\psi}^j \quad (2.2.12)$$

bestimmt durch ein Präpotential U , welches aufgrund der Algebra weiterhin durch folgende Gleichungen eingeschränkt ist:

$$\partial_i \partial_i U + (\partial_i U)(\partial_i U) = 2V_B \quad , \quad x^i \partial_i U = C. \quad (2.2.13)$$

Diese Gleichungen kann man beispielsweise für das Potential des Calogero-Modells (2.1.11) allgemein lösen und damit die $\mathcal{N} = 2$ erweiterten Verallgemeinerungen des Calogero-Modells klassifizieren. Die schon 1990 gefundenen Verallgemeinerungen von [FrMe90] sind darin enthalten.

In $\mathcal{N} = 4$ erweiterter Vielteilchenmechanik geht man vollkommen analog vor [GLP07]; es stellt sich heraus, dass hier nicht nur quadratische, sondern auch quartische Terme der fermionischen Freiheitsgrade im Potential zu berücksichtigen sind. Aus der vollen Algebra erhält man dann das Potential

$$V = V_B + \frac{\hbar^2}{8} F_{ijk} F_{ijk} - U_{ij} \langle \psi_\alpha^i \bar{\psi}^{\alpha j} \rangle + \frac{1}{4} F_{ijkl} \langle \psi_\alpha^i \psi^{j\alpha} \bar{\psi}^{\beta k} \bar{\psi}_\beta^l \rangle, \quad (2.2.14)$$

wobei $\langle \dots \rangle$ das Weyl-geordnete Produkt bezeichnet. Die Koeffizientenfunktionen U_{ij} , F_{ijk} und F_{ijkl} lassen sich aufgrund der Superalgebra (2.2.9) letztlich durch lediglich zwei skalare Präpotentiale U und F folgendermaßen schreiben

$$F_{ijkl} = \partial_i F_{jkl} = \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l F \quad (2.2.15)$$

$$U_{ij} = \partial_i U_j = \partial_i \partial_j U. \quad (2.2.16)$$

Das klassische ($\hbar \rightarrow 0$), bosonische Potential kann dann im $\mathcal{N} = 4$ superkonformen Fall durch

$$V_B = \frac{1}{2}(\partial_i U)(\partial_i U) \quad (2.2.17)$$

ausgedrückt werden.

Schließlich erschöpfen sich die Einschränkungen aus der Superalgebra in den folgenden *Strukturgleichungen*

$$F_{ikp} F_{jlp} = F_{jkp} F_{ilp} \quad (2.2.18)$$

$$x^i F_{ijk} = -\delta_{jk} \quad (2.2.19)$$

$$\partial_i U_j + F_{ijk} U_k = 0 \quad (2.2.20)$$

$$x^i U_i = -C. \quad (2.2.21)$$

Die Struktur und Lösungsmöglichkeiten dieser Gleichungen und damit die Klassifikation dieser $\mathcal{N} = 4$ superkonformen Vielteilchen-Mechanik soll Thema dieser Arbeit sein.

2.3. SCQM und Schwarze Löcher

Superkonform quantenmechanische Modelle bilden nicht nur eine spezielle Klasse integrierbarer Systeme, sondern es besteht auch die Annahme, dass sich mit ihnen physikalisch relevante Modelle beschreiben lassen. Insbesondere gibt es Vermutungen, dass sich die Dynamik von extremalen geladenen schwarzen Löchern effektiv durch derartige Modelle beschreiben lässt.

Der entscheidende Punkt ist hierbei, dass die $\text{AdS}_2 \times S^2$ -Geometrie spezieller vierdimensionaler schwarzer Löcher nahe ihres Ereignishorizonts mithilfe der $\text{AdS}_{d+1}/\text{CFT}_d$ -Korrespondenz im Rahmen von Stringtheorie

durch eine eindimensionale konforme Feldtheorie, also eine konforme Quantenmechanik beschrieben werden kann [CDKKT98].

Genauer gesagt handelt es sich bei diesen schwarzen Löchern um solche vom Reissner-Nordström-Typ. Dies sind eindeutige, sphärisch symmetrische, statische Lösungen der Vakuum-Einstein-Gleichungen zusammen mit quellenfreien Maxwell-Gleichungen, also beschrieben durch die klassische Wirkung (mit Gravitationskonstante $G_N=1$)

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \quad (2.3.1)$$

Diese schwarzen Löcher sind durch Masse M und elektrische sowie magnetische Ladung Q, P charakterisiert. Für

$$M^2 = Q^2 + P^2 \quad (2.3.2)$$

gibt es nur einen Ereignishorizont, man bezeichnet ein solches schwarzes Loch dann als extremal. In isotropischen Koordinaten wird es durch die Metrik

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{M}{r}\right)^{-2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (2.3.3)$$

beschrieben. Nahe dem Ereignishorizont, $r \ll M$, wird der Winkelanteil der Metrik r -unabhängig und Radial- und Zeitteil zu einer Anti-de-Sitter-Metrik,

$$ds^2 = \left(-\frac{r^2}{M^2} dt^2 + \frac{M^2}{r^2} dr^2\right) + (M^2 d\Omega^2), \quad (2.3.4)$$

der sogenannten Bertotti-Robinson-Metrik. Dabei handelt es sich gerade um eine $SO(1, 2) \times SO(3)$ -invariante Metrik auf dem $\text{AdS}_2 \times S^2$. Die Masse M ist gleichermaßen der Radius der 2-Sphäre wie auch proportional zum Krümmungsradius des Anti-de-Sitter-Raumes.

Ein Testteilchen mit Masse m und Ladung q in dieser Geometrie kann nun ebenso gut auch durch eine eindimensionale, konform symmetrische Mechanik beschrieben werden. In [CDKKT98] wird gezeigt, dass diese Mechanik durch den relativistischen Hamilton-Operator

$$H = \frac{\dot{x}^2}{2f} + \frac{mg}{2x^2 f} \quad (2.3.5)$$

beschrieben wird mit

$$f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + (x^2\dot{x}^2 + 4L^2)/4M^2} + q) \quad (2.3.6)$$

und

$$g = \frac{4M^2(m^2 - q^2)}{m} + \frac{4L^2}{m}. \quad (2.3.7)$$

Hierbei entspricht $x = 0$ im Anti-de-Sitter-Raum $r = \infty$ und $x = \infty$ dem Ereignishorizont. Die konforme Symmetrie ist dann durch die Generatoren der konformen Boosts beziehungsweise der Dilatation

$$K = -\frac{1}{2}f(x, \dot{x})x^2 \quad , \quad D = \frac{1}{2}x\dot{x} \quad (2.3.8)$$

gegeben. Im nicht-relativistischen Limes einer großen Masse des schwarzen Lochs $M \rightarrow \infty$ und minimaler Differenz von Masse zu Ladung des Testteilchens $(m - q) \rightarrow 0$ bei festgehaltenem $M^2(m - q)$ erhält man wieder den wohlbekannteren DFF-Hamilton-Operator

$$H = \frac{\dot{x}^2}{2m} + \frac{g}{2x^2}, \quad (2.3.9)$$

nun mit

$$g = 8M^2(m - q) + \frac{4l(l + 1)}{m}. \quad (2.3.10)$$

Für verschwindenden Drehimpuls $l = 0$ lassen sich drei Fälle unterscheiden: Ein ultra-relativistisches Teilchen ($m < q$), dass vom negativen Potential zu $x = 0$ angezogen wird, dass heißt vom schwarzen Loch ins unendliche abgestoßen wird, einem „sub-relativistischen“ Teilchen ($m > q$), welches vom schwarzen Loch angezogen wird und der Extremalfall ($m = q$), in dem das Potential verschwindet, also Anziehung durch Gravitation und Abstoßung durch elektromagnetische Wechselwirkung sich gerade gegenseitig aufheben.

In [CDKKT98] wird des Weiteren ein Superteilchen durch eine Erweiterung der Symmetrie auf $OSp(1|2)$ beschrieben. Als physikalisch relevant wird jedoch eine $SU(1, 1|2)$ -Symmetrie vermutet [GiTo98]: Da die Lösung eines schwarzen Loches in IIB Supergravitation kompaktifiziert auf den Torus T^6 ein extremales schwarzes Loch vom Reissner-Nordström-Typ mit $SU(1, 1|2)$ -Isometrie darstellt und eine äquivalente Formulierung als

Schnittpunkt von $D3$ -branen hat, wird dort vermutet, dass eine $SU(1, 1|2)$ invariante superkonforme Erweiterung des Calogero-Modells, wie sie nun mit (2.2.14) konstruiert ist, die Fluktuationen der $D3$ -branen in der Nähe des Schnittpunkts und damit die mikroskopischen Freiheitsgrade des schwarzen Lochs nahe dem Horizont für $n \rightarrow \infty$ beschreibt. Dabei ist die Vorstellung, dass die n -Teilchen-Quantenmechanik ein Teilchen in Wechselwirkung mit einem $n - 1$ -Teilchen-Cluster beschreibt, der als das schwarze Loch mit seinen $n - 1$ Freiheitsgrade, den „Calogeronen“, auf dem Horizont verstanden wird.

Diese Vermutung ist also neben dem prinzipiellen Interesse an integrierbaren Systemen Motivation für die hier betrachtete $\mathcal{N} = 4$ superkonforme Vielteilchenmechanik.

KAPITEL 3

DIE STRUKTUR DER WDVV-GLEICHUNGEN

Die Strukturgleichungen (2.2.18 - 2.2.21) für die Präpotentiale U und F der $\mathcal{N} = 4$ SCQM aus dem letzten Kapitel werden nun genauer untersucht und ihre Beziehung zu den verallgemeinerten WDVV-Gleichungen aus Seiberg-Witten-Theorie und topologischer Feldtheorie geklärt. Aus der Forderung nach einem flachen Konfigurationsraum wird ein logarithmischer Kovektorlösungsansatz motiviert, der die WDVV-Gleichungen auf algebraische Gleichungen reduziert, und es werden verschiedene äquivalente Formulierungen dieser Gleichungen verglichen.

3.1. Die WDVV-Gleichungen in $\mathcal{N} = 4$ SCQM

Im Abschnitt 2.2 wurde erläutert, wie man zu Darstellungen $\mathcal{N} = 4$ erweiterter Supersymmetrie in Form der Lie-Superalgebra $su(1,1|2)$ mit einer zentralen Erweiterung C auf dem Hilbertraum einer Quantenmechanik von n Teilchen gleicher Masse in einer Raumdimension mit zusätzlichen fermionischen Freiheitsgraden gelangt. Ein derart superkonformer Hamilton-Operator ist demnach von der Form

$$H = \frac{1}{2}p_i p_i + \frac{1}{2}(\partial_i U)(\partial_i U) + \frac{\hbar^2}{8}(\partial_i \partial_j \partial_k F)(\partial_i \partial_j \partial_k F) - (\partial_i \partial_j U) \langle \psi_\alpha^i \bar{\psi}^{\alpha j} \rangle + \frac{1}{4}(\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l F) \langle \psi_\alpha^i \psi^{j\alpha} \bar{\psi}^{\beta k} \bar{\psi}_\beta^l \rangle. \quad (3.1.1)$$

Damit sind die Modelle einer solcher SCQM vollständig durch die beiden Präpotentiale U und F bestimmt, welche Funktionen von den Orten der n Punktteilchen auf der reellen Gerade sind und den Strukturgleichungen (2.2.18 - 2.2.21) genügen müssen. Insbesondere ist der klassische, bosoni-

sche Teil des Potentials

$$V_B = \frac{1}{2}(\partial_i U)(\partial_i U) \quad (3.1.2)$$

vollständig durch das Präpotential U bestimmt.

Es bieten sich daher zwei Wege an, Modelle einer solchen SCQM zu konstruieren:

1. Superkonforme Erweiterung spezieller konformer Modelle: Man startet mit einer bekannten, rein bosonischen Quantenmechanik, wie zum Beispiel dem Calogero-Modell mit $V_B = \sum \frac{g^2}{(x^i - x^j)^2}$ (2.1.11), und sucht nach möglichen Präpotentialen U als Lösung der Differentialgleichung (3.1.2). Diese untersucht man dann dahingehend, ob sich ein Präpotential F finden lässt, so dass die Strukturgleichungen erfüllt werden. Dabei erhält auch der bosonische Teil des Potentials dann Quantenkorrekturen $V_h = \frac{\hbar^2}{8}(\partial_i \partial_j \partial_k F)(\partial_i \partial_j \partial_k F)$.
2. Direktes Lösen der Strukturgleichungen mit bosonischen Potentialen als Konsequenz aus der (U, F) -Lösung.

In [BeGL04] beispielsweise wurde Ersteres für $n = 2, 3$ mit Calogero-Potential versucht. Umfassender ist allerdings der zweite Ansatz, auf den sich im Folgenden konzentriert werden soll. Dazu sollen die Strukturgleichungen zunächst noch einmal explizit in U und F formuliert und genauer betrachtet werden.

Die erste Gleichung (2.2.18) hat so die Form

$$(\partial_i \partial_k \partial_p F) (\partial_j \partial_l \partial_p F) = (\partial_j \partial_k \partial_p F) (\partial_i \partial_l \partial_p F) \quad (3.1.3)$$

Dies ist eine spezielle Version der aus der zweidimensionalen topologischen Feldtheorie bekannten, nach Witten, Dijkgraaf sowie den Verlinde-Brüdern benannten *WDVV-Gleichung* [Wi90, DVV91]. Die WDVV-Gleichung taucht außerdem in effektiver Seiberg-Witten-Theorie auf, indem das Präpotential der $\mathcal{N} = 2$ supersymmetrischen Yang-Mills-Wirkung diese erfüllt [MMM96].

Versteht man die dritten Ableitungen des Präpotentials F als Zusammenhangskoeffizienten $F_{ik}^j = \delta^{jl} \partial_i \partial_l \partial_k F$ auf dem Konfigurationsraum, kann man die WDVV-Gleichung als Bedingung auffassen, dass der Krümmungstensor R_{ijkl} zu diesem Zusammenhang verschwindet, weil dieser sich wegen

der totalen Symmetrie von $F_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k F$ aufgrund der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen auf

$$R_{ijkl} = [F_i, F_j]_{kl} = F_{ik}^p F_{jlp} - F_{jk}^p F_{ilp} \quad (3.1.4)$$

reduziert. Auf diese geometrische Struktur der Gleichungen wird noch genauer im nächsten Abschnitt eingegangen. An dieser Stelle hilft diese Betrachtung aber schon zu der unmittelbaren Erkenntnis, dass die Anzahl der unabhängigen Gleichungen in der WDVV-Gleichung zunächst der Anzahl der Komponenten des Riemanntensors entspricht, also $\frac{(n+1)n^2(n-1)}{12}$ beträgt. Dies wird durch die anderen Strukturgleichungen allerdings noch weiter eingeschränkt.

Das Präpotential U muss entsprechend (2.2.20) der Gleichung

$$\partial_i \partial_j U - (\partial_i \partial_j \partial_k F) \partial_k U = 0 \quad (3.1.5)$$

genügen. Sie lässt sich als Forderung nach kovarianter Konstanz des Kovektors $U_j = \partial_j U$ bezüglich obigen Zusammenhangs verstehen, da sie äquivalent zu

$$(\mathcal{D}_i U)_j = \partial_i U_j - F_{ij}^k U_k = 0 \quad (3.1.6)$$

ist. Auf diese Weise muss allerdings auch

$$0 = [\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j]^l U_l = R_{ijk}^l U_l = [F_i, F_j]_k^l U_l \quad (3.1.7)$$

gelten, was bedeutet, dass die auf ∂U projizierten WDVV-Gleichungen von (3.1.5) impliziert werden.

Schließlich müssen sowohl U als auch F noch unabhängig voneinander die Homogenitätsbedingungen (2.2.21) und (2.2.19) erfüllen. Für U lautet diese

$$x^i \partial_i U = -C. \quad (3.1.8)$$

Damit ist U nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmbar, was bedeutet, dass die eigentlich relevante Größe tatsächlich der Kovektor $U_i = \partial_i U$ ist, der sich aus dem Präpotential U generieren lässt.

Ebenso ist vom Präpotential F die Homogenitätsgleichung

$$x^i (\partial_i \partial_j \partial_k F) = -\delta_{jk}, \quad (3.1.9)$$

zu fordern, so dass F sogar nur eindeutig bis auf Polynome zweiten Grades ist. Diese Freiheit ausnutzend lässt sich (3.1.9) zweifach aufintegrieren zu

$$(x^i \partial_i - 2)F = -\frac{1}{2}x^i x^i. \quad (3.1.10)$$

Bemerkenswert ist, dass die Homogenitätsgleichung (3.1.9) die Kontraktion der WDVV-Gleichungen (3.1.3) mit x^i impliziert, so dass nur die WDVV-Gleichungen in den Winkelanteilen der Koordinaten unabhängig sind. Mit dieser Dimensionsreduktion $n \rightarrow n - 1$ verringert sich die Zahl der unabhängigen WDVV-Gleichungen auf

$$\# = \frac{n(n-1)^2(n-2)}{12}, \quad (3.1.11)$$

so dass sie insbesondere in $n = 2$ automatisch erfüllt sind und sich in $n = 3$ auf eine einzige Gleichung reduzieren, die sogar schon aus (3.1.7) folgt.

Sowohl für U als auch für F sind die „Homogenitätsgleichungen“ inhomogen. Der entscheidende Unterschied ist jedoch, dass diese Inhomogenität im Fall von U durch die zentrale Ladung C der Superalgebra gegeben ist. Dabei erlaubt nur $C = 0$ ein Präpotential $U \equiv 0$, wengleich es selbst dann nichtverschwindende homogene U -Lösungen geben kann.

Dagegen ist die Inhomogenität für F in (3.1.9) mit $-\delta_{jk}$ eine Konstante und lässt daher generell keine Lösung $F \equiv 0$ zu. Das bedeutet, dass selbst Darstellungen der Superalgebra ohne zentrale Ladung nicht wechselwirkungsfrei möglich sind, sondern es immer Potentialterme quartisch in den fermionischen Freiheitsgraden geben muss. Dies spiegelt die obige Tatsache wider (Abschnitt 2.2), dass die Superalgebra in freier Darstellung nicht schließt.

Aufgrund dieser Diskussion stellen sich die beiden am Anfang des Abschnitts skizzierten Konstruktionsstrategien $\mathcal{N} = 4$ superkonformer Vielteilchenmechanik wie folgt dar: Folgt man der ersten Strategie, in dem man von einem klassischen bosonischen Potential V_B startet, muss man ein dazu passendes Präpotential U finden, welches einerseits die Homogenitätsgleichung (3.1.8) erfüllt, zu dem sich aber andererseits auch noch ein Zusammenhang F_{ik}^j mit geeigneter Struktur finden lässt, so dass die entsprechende kovariante Ableitung von $\partial_i U$ gemäß (3.1.6) verschwindet. Dies scheint ohne vorherige Kenntnis des Ergebnis kaum möglich.

Folgt man der zweiten Strategie und sucht nach superkonformen Modellen als Lösung der Strukturgleichungen unabhängig von deren klassischen, bosonischen Grenzfällen, bietet es sich an, zunächst die WDVV- und Homogenitätsgleichungen für das Präpotential F zu lösen; damit hat man auf jeden Fall schon die Lösungen für verschwindende zentrale Ladung C und $U \equiv 0$. Andererseits kann man dann auch noch nach kovarianten Kovektoren ∂U suchen, die nebenbei die Homogenitätsgleichungen für U erfüllen.

In dieser Arbeit soll diesem Weg gefolgt werden. Außerdem soll der Schwerpunkt auf den WDVV-Gleichungen liegen, das schwierige Geschäft der Suche nach U -Lösungen, wie es in [GLP09] und im Rahmen einer Superraumformulierung dieser superkonformen Mechanik mithilfe analoger Gleichungen in [KLP09] betrieben wird, wird hier nicht betrachtet.

3.2. Die verallgemeinerten WDVV-Gleichungen und ihre Geometrie

Interessanterweise stehen die WDVV- und Homogenitäts-Gleichungen (3.1.3, 3.1.9) zusammen genommen in einem direktem Zusammenhang mit den sogenannten *verallgemeinerten WDVV-Gleichungen*, wie sie im Rahmen von Seiberg-Witten-Theorie eingeführt wurden [MMM96]. Da ein Großteil der Literatur von den WDVV-Gleichungen in dieser Form ausgeht, ist es hilfreich, sie genauer zu betrachten und die Beziehung zu den Strukturgleichungen der $\mathcal{N} = 4$ SCQM zu klären.

Die verallgemeinerten WDVV-Gleichungen werden als

$$F_i F_k^{-1} F_j = F_j F_k^{-1} F_i \tag{3.2.1}$$

formuliert, wobei die $(F_i)_{jk} = \partial_i \partial_j \partial_k F$ zu einem Präpotential $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum $V \cong \mathbb{R}^n$ als Komponenten von $n \times n$ -Matrizen beziehungsweise $(0, 2)$ -Tensoren F_i aufgefasst werden. In [Ve99] werden diese Gleichungen als verallgemeinert bezeichnet, weil bis zu [MMM96] nur der Spezialfall $k = 1$ einer ausgezeichneten Variable für F^{-1} betrachtet wurde. Gleichwohl stellen sie unter gewissen Nebenbedingungen auch eine allgemeinere Formulierung der Strukturgleichungen für F aus dem vorherigen Abschnitt dar.

Um dies zu demonstrieren, betrachtet man zunächst eine nichtentartete

Linearkombination

$$G(y) := \eta^i(y)F_i(y) = (\eta \lrcorner F)(y), \quad (3.2.2)$$

für $y \in V$, definiert durch ein Vektorfeld $\eta(y) = \eta^i(y)\partial_i$. Wegen der Symmetrie der F_i -Matrizen kann diese als Metrik $G_y := G(y)$ auf dem Tangentialbündel TV verstanden werden und ermöglicht eine Dualität zwischen Vektoren $u \in TV$ und Kovektoren in $\check{u} \in TV^*$ gemäß

$$\check{u}(v) = G_y(u, v) = \eta^i(y)F_{ijk}(y)u^i v^k, \quad (3.2.3)$$

was in Koordinaten dem Herauf- beziehungsweise Herunterziehen von Indizes

$$(\check{u})_j = u_j = G_{ij}u^i$$

entspricht.

Die verallgemeinerten WDVV-Gleichungen (3.2.1) sind für ein gegebenes G äquivalent zu [MMM97, MaGr99]

$$F_i G^{-1} F_j = F_j G^{-1} F_i \quad (3.2.4)$$

und durch Linksmultiplikation mit G^{-1} entspricht dies der Kommutatorgleichung

$$[\check{F}_i, \check{F}_j] = \check{F}_i \check{F}_j - \check{F}_j \check{F}_i = 0. \quad (3.2.5)$$

Die WDVV-Gleichungen (3.1.3) im vorherigen Abschnitt sind hiervon der Spezialfall, in dem $G_{ij} = \delta_{ij}$ die Metrik zum Standardskalarprodukt ist, was lokal immer möglich ist, insbesondere aufgrund der Trivialität des Tangentialbündels $TV \cong T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \cong V$ hier auch global. Fordert man dies, erhält man mit der Definition der Metrik G (3.2.2) aber eine zusätzliche Gleichung, die in der Wahl des Euler-Vektorfeldes $\eta^i(y) = y^i$ bis auf Vorzeichen gerade der Homogenitätsgleichung (3.1.9) entspricht. Das Vorzeichen lässt sich ins Präpotential F absorbieren, da die WDVV-Gleichungen (3.1.3) beziehungsweise die Kommutatorgleichung (3.2.5) unabhängig von einer Skalierung von F sind. Die Homogenitätsgleichung legt in diesem Sinne lediglich die Koordinaten als euklidisch fest.

Also sind Kommutatorgleichung (3.2.5) und Metrikdefinition (3.2.2) mit dem Euler-Vektorfeld zusammen äquivalent zu den Strukturgleichungen für das Präpotential F der $\mathcal{N} = 4$ SCQM. Für ein solches gegebenes Vektorfeld η sind diese wiederum auch äquivalent zu den verallgemeinerten

WDVV-Gleichungen (3.2.1), es ist aber nicht der Fall, dass die Kommutatorgleichung mit einer beliebigen Metrik aus ihnen hervorgeht. Das bedeutet, dass unter Voraussetzung der Homogenitätsgleichung (3.1.9) die WDVV-Gleichungen (3.1.3) äquivalent zu den verallgemeinerten WDVV-Gleichungen (3.2.1) sind.

Für unsere Zwecke soll also die Metrik im Folgenden immer über das Euler-Vektorfeld definiert sein. Der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang hat dann als Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}\Gamma_{ik}^j &= \frac{1}{2}G^{jl}(\partial_k G_{il} + \partial_i G_{kl} - \partial_l G_{ik}) \\ &= \frac{1}{2}G^{jl}(\delta_k^p F_{pil} + y^p \partial_p F_{ikl}),\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

die sich mit der Identität

$$0 = \partial_k(G_{il}G^{lj}) = \partial_k(y^p F_{ip}^j) = F_{ik}^j + y^p \partial_k F_{ip}^j\tag{3.2.7}$$

$$= G^{jl}(F_{ikl} + y^p \partial_p F_{ikl}) + (\partial_k G^{lj})y^p F_{ilp}\tag{3.2.8}$$

zu

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2}G^{jl}(F_{ikl} + y^p F_{pikl}) = -\frac{1}{2}G_{il}(\partial_k G^{jl}) = \frac{1}{2}G^{jl}(\partial_k G_{il})\tag{3.2.9}$$

vereinfachen. Davon zu unterscheiden sind obige Überlegungen (3.1.4) zu einem durch das Präpotential F definierten Zusammenhang, der sich nun aber auch präzisieren lässt: Die Gesamtheit der Matrizen \check{F}_i lässt sich als Einsform $\check{F} := \check{F}_i dy^i$ verstehen, so dass $\mathcal{D} = \partial + \check{F}$ offensichtlich die einen Zusammenhang definierenden Eigenschaften der Linearität in der letzten Komponente und die Leibnizregel erfüllt. Die Krümmungsform dieses Zusammenhangs ist dann

$$R_{ij}^F = (d\check{F} + \check{F} \wedge \check{F})_{ij}\tag{3.2.10}$$

$$= \partial_i \check{F}_j - \partial_j \check{F}_i + \check{F}_i \check{F}_j - \check{F}_j \check{F}_i\tag{3.2.11}$$

$$= [\check{F}_i, \check{F}_j]\tag{3.2.12}$$

und verschwindet gemäß der WDVV-Gleichungen (3.2.5). In die Definition dieses flachen Zusammenhangs ist dabei zwar die Metrik G schon eingegangen, der Zusammenhang ist aber von deren Levi-Civita-Zusammenhang

(3.2.6) offensichtlich verschieden. Aufgrund der Symmetrie in den beiden unteren Indizes ist \check{F} zwar auch ein torsionsfreier, jedoch im Allgemeinen kein metrischer Zusammenhang; der naheliegende Ansatz einer Metrik $g_{ij} := \partial_i \partial_j F$ beispielsweise liefert nicht \check{F} als Levi-Civita-Zusammenhang:

$$\Gamma_{ik}^j(g) = \frac{1}{2} g^{jl} F_{ikl} \neq G^{jl} F_{ikl} = (\check{F}_i)^j_k.$$

Ein bemerkenswerter Aspekt dieser Konstruktion ist, dass sich durch \check{F} eine Multiplikation auf TV definieren lässt

$$u \star v := u \lrcorner \check{F}(v) = v \lrcorner \check{F}(u), \quad (3.2.13)$$

beziehungsweise in Koordinaten

$$(u \star v)^i = (\check{F}_j)^i_k u^j v^k,$$

welche nicht nur definitionsgemäß kommutativ ist und die sogenannte *Frobenius-Eigenschaft* [FeVe07]

$$(u \star v) \cdot w = u \cdot (v \star w)$$

erfüllt (mit „ \cdot “ für das Skalarprodukt bezüglich G), sondern dank der WDVV-Gleichungen auch assoziativ ist,

$$(u \star v) \star w = u \star (v \star w).$$

Für ein flaches G erhält man so eine Frobenius-Mannigfaltigkeit und damit einen weiteren, spezifisch geometrischen Rahmen, in dem die WDVV-Gleichungen mathematisch untersucht werden können [Du94].

Es liegt nun für einen Vektorraum als Mannigfaltigkeit mit euklidischer Struktur nahe, konstante Metriken G zu betrachten. Dann ist die Transformation von euklidischen Koordinaten $\{x^i\}$ in beliebige andere $\{y^i\}$ linear und wird im Folgenden mit

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow V \quad , \quad y^i = f^i(x^j) = M^i_j x^j = (M^{-1}x)^i \quad (3.2.14)$$

bezeichnet, so dass Kovektoren $\beta_i = M_i^j \alpha_j = (M\alpha)_i$ über die Matrix M transformieren. Damit erhält man eine Zerlegung der von f induzierten Metrik in den Koordinaten $\{y^i\}$ [Le08a]

$$G_{ij} = M_i^k M_j^l \delta_{kl} = (MM^T)_{ij}. \quad (3.2.15)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die WDVV-Gleichungen auch tatsächlich invariant unter solchen linearen Transformationen sind: Die dritten Ableitung des Präpotentials F transformieren als (1,2)-Tensoren $F_{i k}^j = (\check{F}_i)^j_k \rightarrow M_i^l M_m^j M_k^n F_l^m_n$, so dass die Gleichungen

$$0 = [\check{F}_i(x), \check{F}_j(x)]_l^k = F_p^k_{[i}(x) F_j]^p_l(x) \quad (3.2.16)$$

$$\rightarrow M_i^m M_j^n M_r^k M_l^s \check{F}_p^r_{[m}(y), \check{F}_n]^p_s(y) = 0 \quad (3.2.17)$$

äquivalent zu Gleichungen identischer Struktur

$$\check{F}_p^r_{[m}(y), \check{F}_n]^p_s(y) = 0 \quad (3.2.18)$$

in den neuen Koordianten sind. Nach (3.3.18) sind die WDVV-Gleichungen damit insbesondere invariant unter orthogonalen Transformationen $MM^T = \mathbf{1}$, welche die Metrik erhalten beziehungsweise die Homogenitätsgleichung invariant lassen.

Explizit lässt sich für eine gegebene Metrik G die Transformationsmatrix M mittels Cholesky-Zerlegung berechnen. Auf diese Weise lassen sich alle Betrachtungen in der Literatur zu den verallgemeinerten WDVV-Gleichungen mit konstanter Metrik G direkt in die Problematik der $\mathcal{N} = 4$ SCQM transformieren.

Im Übrigen kann auch die SCQM von Grund auf derart formuliert werden, dass die Struktur-Gleichungen mit einer allgemeinen, konstanten Metrik G folgen. Dafür muss der Antikommutator der fermionischen Freiheitsgrade verallgemeinert als

$$\{\psi_\alpha^i, \psi^{j\beta}\} = G^{ij} \delta_\alpha^\beta$$

postuliert werden. Dies wird besonders in der Superraumformulierung von [KLP09] deutlich, wo G direkt in der Wirkung auftaucht.

3.3. Algebraisierung der WDVV-Gleichungen

Durch einen geschickten Lösungsansatz lassen sich die WDVV von partiellen Differentialgleichungen auf algebraische Gleichungen reduzieren. Die Motivation für diesen Ansatz liegt gerade in der Forderung einer konstanten Metrik G . Aufgrund der euklidischen Struktur des Vektorraums wird

im Folgenden $TV \cong V$ identifiziert und von (Ko)Vektoren nur noch im Sinne der linearen Algebra und von der „Metrik“ G als der ein Skalarprodukt „ \cdot “ definierenden Bilinearform gesprochen.

Die Definition der Metrik (3.2.2) wird durch die Forderung der Konstanz analog zur Homogenitätsgleichung (3.1.10) zu einer inhomogenen Differentialgleichung

$$(y^i \partial_i - 2)F(y) = \frac{1}{2}G_{ij}y^i y^j \quad (3.3.1)$$

für das Präpotential F . Diese wird durch die Summe einer inhomogenen Lösung F_{inhom} mit beliebigen homogenen Lösungen F_{hom} gelöst. Da die Gleichung in sphärischen Koordinaten $\{y^i\} \rightarrow \{r = \sqrt{G_{ij}y^i y^j}, \hat{\theta}\}$ ausgedrückt

$$(r\partial_r - 2)F(r, \hat{\theta}) = -\frac{1}{2}r^2 \quad (3.3.2)$$

nur noch von der radialen Koordinate abhängt, separieren die homogenen Lösungen in Radial- und Winkelanteil zu

$$F_{hom}(r, \hat{\theta}) = f(\hat{\theta})g(r) = r^2 f(\hat{\theta}), \quad (3.3.3)$$

sind also durch beliebige Funktionen der Winkel $f(\hat{\theta}) = f(\frac{y^i}{r})$ bestimmt. Eine einfache und naheliegende inhomogene Lösung ist durch

$$F_{inhom}(r) = \frac{1}{2}r^2 \ln r = \frac{1}{4}r^2 \ln r^2 \quad (3.3.4)$$

gegeben. Da sich sphärische Koordinaten aber für die Lösung der WDVV-Gleichungen eher als unhandlich erweisen¹, verzichtet man in der weiteren Betrachtung lieber auf die homogenen Lösungen und verallgemeinert stattdessen die inhomogene Lösung (3.3.4) in den ursprünglichen Koordinaten $\{y^i\}$ zu

$$F_{inhom}(y) = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^p Q^a(y) \ln |Q^a(y)|, \quad (3.3.5)$$

¹In [KLP09] sind für $n = 2, 3$ spezielle Lösungen für äquivalente Gleichungen in sphärischen Koordinaten formuliert; sie scheinen die Symmetrien der WDVV-Gleichungen allerdings eher zu verschleiern.

charakterisiert durch quadratische Formen $Q^a(y) = Q_{ij}^a y^i y^j$ mit

$$\sum_{a=1}^p Q_{ij}^a = G_{ij}. \quad (3.3.6)$$

Die Lösung (3.3.4) ist dann der einfachste Fall einer einzigen quadratischen Form $Q(y) = G_{ij} y^i y^j = r^2$.

Mit diesem Ansatz ergeben sich die dritten Ableitungen zu

$$\partial_i \partial_j \partial_k F(y) = \sum_{a=1}^p \left(\frac{Q_{ij}^a Q_{kl}^a + Q_{ik}^a Q_{jl}^a + Q_{il}^a Q_{jk}^a}{Q^a(y)} y^l - 2 \frac{Q_{il}^a Q_{jm}^a Q_{kn}^a}{(Q^a(x))^2} y^l y^m y^n \right). \quad (3.3.7)$$

Als Spezialfall betrachtet man lediglich quadratische Formen vom Rang 1, die durch Kovektoren $\beta_a \in \mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ mit $\text{span} \mathcal{B} = V^*$ als $Q^a(y) = \beta_a(y)^2 \equiv \beta_{ai} \beta_{aj} y^i y^j$ dargestellt werden können. Dabei wird die Wirkung der Kovektoren auf Vektoren als

$$\beta_a(y) \equiv \beta_{ai} y^i \quad (3.3.8)$$

verstanden. Somit erhält man den Lösungsansatz

$$F(y) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^p \beta_a(y)^2 \ln |\beta_a(y)|, \quad (3.3.9)$$

beziehungsweise, die Nummerierung der Kovektoren unterdrückend,

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \beta(y)^2 \ln |\beta(y)|. \quad (3.3.10)$$

Die dritten Ableitungen dieser logarithmischen Funktion sind entsprechend (3.3.7) nun durch

$$\partial_i \partial_j \partial_k F = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{\beta_i \beta_j \beta_k}{\beta(y)}, \quad (3.3.11)$$

gegeben, so dass man die Metrik als

$$G_{ij}(y) = y^k \partial_i \partial_j \partial_k F(y) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \beta_i \beta_j \quad (3.3.12)$$

erhält. Die WDVV-Kommutatorgleichung (3.2.5) wird damit zu

$$0 = 2G[\check{F}_i, \check{F}_j] = 2G \left[\sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{\beta_i \check{\beta} \otimes \beta}{\beta(y)}, \sum_{\beta' \in \mathcal{B}} \frac{\beta'_j \check{\beta}' \otimes \beta'}{\beta'(y)} \right] \quad (3.3.13)$$

$$= 2G \sum_{\beta, \beta' \in \mathcal{B}} \frac{\beta_i \beta'_j}{\beta(y) \beta'(y)} (\check{\beta} \otimes \beta(\check{\beta}') \beta' - \check{\beta}' \otimes \beta'(\check{\beta}) \beta) \quad (3.3.14)$$

$$= \sum_{\beta, \beta' \in \mathcal{B}} \frac{\beta \cdot \beta'}{\beta(y) \beta'(y)} \beta_i \beta'_j \beta \wedge \beta' + \sum_{\beta, \beta' \in \mathcal{B}} (\beta \leftrightarrow \beta') \quad (3.3.15)$$

$$= \sum_{\beta, \beta' \in \mathcal{B}} \frac{\beta \cdot \beta'}{\beta(y) \beta'(y)} (\beta \wedge \beta')_{ij} \beta \wedge \beta'. \quad (3.3.16)$$

Auf diese Weise ist das komplizierte System partieller, nichtlinearer Differentialgleichungen nun auf einen Satz nichtlinearer, algebraischer Gleichungen reduziert. Aufgrund der Antisymmetrie des Dach-Produkts und Symmetrie des Skalarprodukts ist die Doppelsumme symmetrisch und besteht so aus $\frac{p(p-1)}{2}$ verschiedenen Summanden, also

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta, \beta' \in \mathcal{B}} \frac{\beta \cdot \beta'}{\beta(y) \beta'(y)} (\beta \wedge \beta')_{ij} \beta \wedge \beta' = \sum_{1 \leq a < b \leq p} \frac{\beta_a \cdot \beta_b (\beta_a \wedge \beta_b)_{ij}}{\beta_a(y) \beta_b(y)} \beta_a \wedge \beta_b = 0. \quad (3.3.17)$$

An den algebraisierten WDVV-Gleichungen sieht man direkt, dass zwei Lösungen dieser Gleichungen charakterisiert durch Kovektormengen $\mathcal{B} \subset V^*$ und $\mathcal{B}' \subset V^*$ gemeinsam wiederum eine durch $\check{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' =: \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$ charakterisierte Lösung in $V \oplus V'$ ergeben; Lösungen dieser Form werden als *reduzibel* bezeichnet, lässt sich keine derartige Zerlegung vollziehen, nennt man sie *irreduzibel*.

Wesentlich für die Vereinfachung der Gleichungen ist, dass sich die quadratische Form in das Produkt zweier Linearformen $Q(y) = \beta(y)\beta(y) = \beta(y)^2$ zerlegt, so dass sich in den dritten F -Ableitungen alle y -Terme aus dem Zähler herauskürzen. Diese Vereinfachung bekommt man für quadratische Formen höheren Ranges nicht; selbst wenn sie symmetrisch sind, erhält man durch Cholesky-Zerlegung $Q = N^T N$ in obere Dreiecksmatrizen N nur eine Zerlegung in ein Skalarprodukt $Q(y) = N(y) \cdot N(y)$, was eine derartige Vereinfachung nicht ermöglicht. In dieser Arbeit wird sich daher prinzipiell auf den Kovektoransatz beschränkt.

In der Literatur zu den WDVV-Lösungen gibt es davon eine Ausnahme: Die radiale Lösung (3.3.4) lässt sich in Kovektorlösungen integrieren [GLP09] und mithilfe dieser Technik kann man sogar die irreduziblen Teile einer reduziblen Lösung auf verschiedene Arten zu einer irreduziblen Lösung kombinieren [LePo09].

Schließlich soll noch die Transformation in euklidische Koordinaten $\{x^i\}$ (3.2.14) betrachtet werden. Die Kovektoren $\beta \in \mathcal{B}$ transformieren sich zu $\alpha = M^{-1}\beta \in \mathcal{A}$, so dass die Metrik in diesen Koordinaten zu

$$G = \sum_{\beta} \beta \otimes \beta = \sum_{\alpha} M\alpha \otimes M\alpha = M\left(\sum_{\alpha} \alpha \otimes \alpha\right)M^T = MM^T \quad (3.3.18)$$

wird und aus dem Vergleich mit der allgemeinen Metriktransformation (3.2.15) direkt

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \quad (3.3.19)$$

abgelesen werden kann. Dies ist somit die Form der Homogenitätsgleichung (3.1.9) im Kovektoransatz.

Die WDVV-Gleichungen (3.3.16) sind, wie nach (3.2.16) zu erwarten, von gleicher Form

$$\sum_{\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}} \frac{\alpha \cdot \alpha' (\alpha \wedge \alpha')_{ij}}{\alpha(x)\alpha'(x)} \alpha \wedge \alpha' = 0 \quad (3.3.20)$$

und unterscheiden sich nur darin, dass $\alpha \cdot \alpha' = \delta^{ij} \alpha_i \alpha'_j$ nun das Standardskalarprodukt bezeichnet.

3.4. Die Projektorgleichung

Motiviert durch die Feststellung, dass die entscheidenden Teilsummen in den algebraisierten WDVV-Gleichungen (3.3.20) solche über koplanare Kovektorpaare sind, wie weiter unten im Abschnitt 4.1 näher ausgeführt wird, bietet sich eine weitere Betrachtungsweise der Gleichungen an.

Die Homogenitätsgleichung im Kovektor-Ansatz lässt sich auch auf eine etwas andere Weise formulieren und verstehen: Sei A die Matrix die sich aus den Kovektoren $\{\alpha_a\}_{a=1, \dots, p}$ als Spaltenvektoren aufbaut, also in Koordinaten $A_{ia} := \alpha_{ia}$. Damit hat man eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^p \rightarrow V^*$,

welche die Standard-Einheitsbasis des \mathbb{R}^p auf die Kovektoren $\alpha \in V$ abbildet. Die Homogenitätsgleichung (3.3.19) lässt sich dann in diesen Matrizen schreiben als

$$AA^T = \mathbf{1}_n. \quad (3.4.1)$$

Der umgekehrte Ausdruck

$$P := A^T A \quad (3.4.2)$$

ist wegen $P^2 = A^T AA^T A = A^T A = P$ dann ein Projektor im \mathbb{R}^p .

Die Einschränkung auf die p' Kovektoren aus \mathcal{A} , welche in einer Ebene $\Pi \subset V^*$ liegen,

$$\mathcal{A}_\Pi := \mathcal{A} \cap \Pi = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{p'}}\} \quad (3.4.3)$$

lässt sich nun als Abbildung $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p'}$ formulieren, deren Matrix E_Π aus p Einsen an passenden Stellen besteht und daher aufgrund $E_\Pi E_\Pi^T = \mathbf{1}_{p'}$ wiederum einen Projektor $Q_\Pi := E_\Pi^T E_\Pi$ im $\mathbb{R}^{p'}$ mit sich bringt. Damit kann man die Abbildung f_A im Urbild auf $\mathbb{R}^{p'}$ eingeschränkt durch die Matrix $A_\Pi := AE_\Pi^T$ beschreiben, also $f_A|_{\mathbb{R}^{p'}} = f_{A_\Pi}$.

Die Einschränkung auf die entsprechende Ebene Π in V^* ist nicht von derart einfacher Form, sondern muss explizit mithilfe zweier in der Ebene liegenden Kovektoren $\alpha_1, \alpha_2 \in \Pi$ durch

$$C_\Pi \xi := \frac{\alpha_1 \cdot \xi}{\alpha_1 \cdot \alpha_1} \alpha_1 + \frac{\alpha_2 \cdot \xi}{\alpha_2 \cdot \alpha_2} \alpha_2 \quad (3.4.4)$$

definiert werden. Wiederum ist $C_\Pi C_\Pi^T = \mathbf{1}_2$ und die entsprechende Projektormatrix zu dieser Einschränkung $f_{C_\Pi} : V^* \rightarrow \Pi$ wird im Folgenden $R_\Pi := C_\Pi^T C_\Pi$ genannt. Da das Bild von f_{A_Π} die Ebene Π in V^* ist, das heißt

$$\text{Bild}(A_\Pi) \perp \text{Kern}(C_\Pi), \quad (3.4.5)$$

bleibt die Matrix A_Π invariant unter Linksmultiplikation mit diesem Projektor,

$$A_\Pi = R_\Pi A_\Pi. \quad (3.4.6)$$

Die Situation lässt sich damit folgendermaßen in einem kommutativem Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \xrightarrow{A} & V^* \\ E_\Pi \downarrow & \nearrow A_\Pi & \downarrow C_\Pi \\ \mathbb{R}^{p'} & \xrightarrow{D_\Pi} & \Pi \end{array}$$

Die zunächst überraschende Feststellung bei der Betrachtung einiger Beispiele ist nun, dass für die Fortsetzung der Abbildung f_{A_Π} auf die Ebene Π , also für $D_\Pi = C_\Pi A_\Pi = C_\Pi A E_\Pi^T$, zu gelten scheint, dass

$$D_\Pi D_\Pi^T = \lambda_\Pi \mathbf{1}_2 \quad (3.4.7)$$

für ein $\lambda_\Pi \in \mathbb{R}$. Das bedeutet nun, dass $P_\Pi := D_\Pi^T D_\Pi$ proportional zu einem Projektor in $\mathbb{R}^{p'}$ ist. Aufgrund der Linksinvarianz von A_Π kann dieser wieder zu

$$P_\Pi = (C_\Pi A_\Pi)^T (C_\Pi A_\Pi) = A_\Pi^T C_\Pi^T C_\Pi A_\Pi = A_\Pi^T R_\Pi A_\Pi = A_\Pi^T A_\Pi \quad (3.4.8)$$

vereinfacht werden.

Auf diese Weise führt die Analyse von Beispielen zur Vermutung, dass für jede Ebene $\Pi = \text{span}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{p'}}\}$ ein Projektor $\frac{1}{\lambda_\Pi} P_\Pi$ existiert. Die entsprechenden Gleichungen

$$P_\Pi^2 = \lambda_\Pi P_\Pi \quad (3.4.9)$$

werden im Folgenden als *Projektorgleichung* für die Ebenen Π bezeichnet.

3.5. Äquivalenz zur Veselovschen \vee -Bedingung

Es stellt sich heraus, dass diese Projektorgleichungen tatsächlich äquivalent zu den algebraisierten WDVV-Gleichungen sind. Der entscheidende Punkt hierfür ist, dass die Projektorgleichungen eine äquivalente Formulierung zur sogenannten \vee -Bedingung von A.P. Veselov sind [Ve99]. In [Ve01] wurde gezeigt, dass diese \vee -Bedingung eine notwendige und hinreichende Charakterisierung für Lösungen der WDVV-Gleichungen im Kovektoransatz (3.3.10) ist. Dies soll im Folgenden skizziert und die Äquivalenz zu den Projektorgleichungen gezeigt werden.

Die \vee -Bedingung ist für eine Menge von Kovektoren $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ definiert durch die Forderung, dass es für beliebige Flächen $\Pi \subset V^*$ ein $\lambda_\Pi \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jeden Kovektor $\beta \in \Pi$ gilt

$$\sum_{\beta' \in \Pi} \beta'(\check{\beta}) \check{\beta}' = \lambda_\Pi \check{\beta}, \quad (3.5.1)$$

wobei die \vee -Dualität wie gehabt durch (3.3.12) gegeben ist. Erfüllt \mathcal{B} die \vee -Bedingung, wird \mathcal{B} auch als \vee -System bezeichnet.

In Indexschreibweise haben die Gleichungen (3.5.1) der \vee -Bedingung die Gestalt

$$\sum_{\beta' \in \Pi} \beta'_i \beta'^j \beta^i = \lambda_\Pi \beta^j. \quad (3.5.2)$$

Eine weitere Formulierung dafür erhält man durch Definition einer weiteren Bilinearform

$$G_\Pi(y, y') := \sum_{\beta \in \Pi} \beta(y) \beta(y') = \sum_{\beta \in \Pi} \beta_i \beta_j y^i y'^j \quad (3.5.3)$$

und Anwenden der Metrik G_{kj} auf die \vee -Bedingung (3.5.2), nämlich dass für $\beta \in \Pi$

$$G_\Pi(\cdot, \check{\beta}) = \sum_{\beta' \in \Pi} \beta'_k \beta'_i \beta^i = \lambda_\Pi G_{kj} \beta^j = \lambda_\Pi G(\cdot, \check{\alpha}), \quad (3.5.4)$$

oder verkürzt

$$G_\Pi|_{\check{\Pi}} = \lambda_\Pi G|_{\check{\Pi}} \quad (3.5.5)$$

gilt, wobei $\check{\Pi} \subset V$ die duale Ebene bezeichnet.

Der exakte Beweis in [Ve01] für die Aussage, dass der Kovektoransatz (3.3.10) genau dann die verallgemeinerten WDVV-Gleichungen (3.2.5) löst, wenn \mathcal{B} ein \vee -System darstellt, ist zu umfangreich, um hier im Detail nachvollzogen zu werden. Zumindest die Argumentation für die eine Richtung, nämlich dass \vee -Systeme Lösungen der WDVV-Gleichungen sind, ist fürs Weitere aber von Interesse und soll daher kurz skizziert werden.

Für ein gegebenes \vee -System lassen sich drei Arten von Ebenen Π unterscheiden:

1. Es gibt lediglich ein $\beta \in \mathcal{B}$, welches in Π liegt. Dann ist (3.5.1) aber trivialerweise mit $\lambda_\Pi = \beta(\check{\beta})$ erfüllt. Damit sind \vee -Systeme durch eine endliche Anzahl von Gleichungen bestimmt, nämlich maximal von der Anzahl $\frac{p(p-1)}{2}$ von Kovektorpaaren.
2. Es liegen zwei (linear unabhängige) $\beta, \beta' \in \Pi$ vor. Dann ist (3.5.1) gleichbedeutend mit der Aussage, dass die beiden Kovektoren ortho-

gonal zueinander stehen bezüglich G , weil

$$\beta(\check{\beta})\check{\beta} + \beta'(\check{\beta})\check{\beta}' = \|\beta\|^2\beta + (\beta \cdot \beta')\beta' = \lambda_{\Pi}\beta \tag{3.5.6}$$

$$\Leftrightarrow \beta \cdot \beta' = 0. \tag{3.5.7}$$

3. Mehr als zwei Kovektoren liegen in der Ebene Π . Dann ist die Teilsumme über diese Kovektorpaare in der algebraisierten Gleichung (3.3.16) jedoch gemäß (3.5.5) proportional zu der WDVV-Gleichung einer zweidimensionalen Lösung

$$F(y) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Pi \cap \mathcal{B}} \beta(y)^2 \ln \beta(y)^2 \tag{3.5.8}$$

und in zwei Dimensionen ist die WDVV-Gleichung gemäß (3.1.11) trivial.

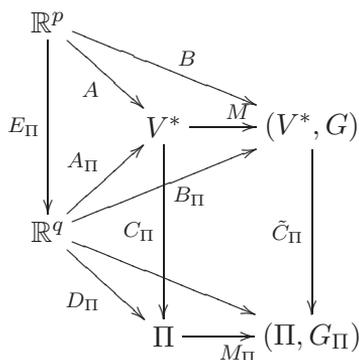
Damit ist klar, dass \vee -Systeme Lösungen der WDVV-Gleichungen sind und es lässt sich zeigen, dass dies auch eine hinreichende Bedingung ist.

Um die Äquivalenz der Projektorüberlegungen aus Abschnitt (3.4) zur \vee -Bedingung zu zeigen, muss man einfach die Projektorgleichungen mittels der linearen Transformation durch die Matrix M in die Koordinaten $\{y^i\}$ mit beliebiger konstanter Metrik G entsprechend (3.2.15) transformieren.

Die Projektoren für eine Ebene $\Pi \in V^*$ ermitteln sich dann folgendermaßen: Analog zur Matrix $A_{ia} = \alpha_{ia}$ definiert man $B_{ia} := \beta_{ia} = M_i^j \alpha_{ja} = (MA)_{ia}$, so dass sich die Metrik G nun gemäß (3.3.18) als

$$G_{ij} = \beta_{ia}\beta_{aj} = (BB^T)_{ij} \tag{3.5.9}$$

schreiben lässt. Zur Veranschaulichung hilft wiederum ein Diagramm:



Der Projektor P wirkt im \mathbb{R}^p und bleibt daher derselbe wie in euklidischen Koordinaten,

$$P^a_b = A^a_i \delta^{ij} A_{jb} = B^a_i G^{ij} B_{jb} = (B^T G^{-1} B)^a_b. \quad (3.5.10)$$

Ebenfalls analog zum euklidischen Fall erhält man durch Auswahl der p' Kovektoren, die in der Ebene Π liegen, die Matrix $B_\Pi := B E_\Pi^T$ und somit eine weitere Form für den Projektor $P_\Pi = B_\Pi^T G^{-1} B_\Pi = A_\Pi^T A_\Pi$ für die Ebene Π . Entsprechend (3.5.3) ist nun

$$G_\Pi = B_\Pi B_\Pi^T = M A Q_\Pi A^T M^T, \quad (3.5.11)$$

so dass die Projektorgleichung (3.4.9) in diesen Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} P_\Pi^2 &= B_\Pi^T G^{-1} B_\Pi B_\Pi^T G^{-1} B_\Pi = B_\Pi^T G^{-1} G_\Pi G^{-1} B_\Pi \\ &= B_\Pi^T \lambda_\Pi G^{-1} B_\Pi = \lambda_\Pi P_\Pi \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

annimmt. Dabei ist entscheidend, dass das Bild von B_Π wiederum die Ebene Π in V^* ist. Die enthaltene Gleichung

$$G^{-1} G_\Pi G^{-1} = \lambda_\Pi G^{-1} \quad (3.5.13)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$G_\Pi = \lambda_\Pi G \quad (3.5.14)$$

im Sinne der Äquivalenz zur Projektorgleichung ist gültig auf Kovektoren aus der Ebene Π beziehungsweise für Vektoren aus Π . Letztere Gleichung ist aber schon die Gleichung der \vee -Bedingung (3.5.5). Die Erfüllung der Projektorgleichung für beliebige Ebenen $\Pi \subset V^*$ entspricht also genau der \vee -Bedingung, insbesondere auch in der besonders einfachen Form euklidischer Koordinaten (3.4.9).

In diesem Kapitel wurde also die Struktur der WDVV-Gleichungen und ihre Geometrie untersucht, sowie für den Fall einer flachen, konstanten Metrik ein allgemeiner, logarithmische Lösungsansatz, definiert über eine Menge von Kovektoren, vorgestellt. In diesem Fall lassen sich die WDVV algebraisieren und es gibt mit den \vee -Bedingungen beziehungsweise den Projektorgleichungen weitere interessante, äquivalente Formulierungen des Problems. Insbesondere die Projektorgleichungen in euklidischen Koordinaten haben dabei eine besonders einfache Gestalt, die durch die Homogenitätsgleichung als zusätzliche Gleichung erkaufft wird.

KAPITEL 4

LÖSUNGEN DER WDVV-GLEICHUNGEN

In diesem Kapitel sollen nun konkret Lösungen der WDVV-Gleichungen aus dem Kovektoransatz untersucht werden. Ziel ist es dabei, die in der Literatur bekannten Kovektorlösungen vollständig zusammenzutragen und zu verstehen.

4.1. Wurzelsysteme von Coxeter-Gruppen als WDVV-Lösungen

Eine erste größere Klasse von Lösungen der WDVV-Gleichungen aus dem Kovektoransatz bilden die positiven Wurzeln $\mathcal{B} = \Phi^+$ aus Wurzelsystemen Φ halbeinfacher Lie-Algebren, wie von Martini und Gragert in [MaGr99] bewiesen wurde. Der entscheidende Punkt ist dabei, dass die Form der Metrik G im Kovektoransatz (3.3.12) gerade der Definition der Killing-Form entspricht, so dass die Skalarprodukte positiver Wurzeln durch die Cartan-Matrix gegebene, ganze Zahlen sind.

Inwiefern solche Wurzelsysteme die WDVV-Gleichungen lösen, soll hier jedoch nach [GLP09] in den euklidischen Koordinaten der $\mathcal{N} = 4$ superkonformen n -Teilchenmechanik demonstriert werden, da diese Sichtweise für die Betrachtung der Kovektorlösungssysteme über Polytope später noch relevant wird (Abschnitt 5.1). Um die Wurzeln $\tilde{\alpha}_a \in \tilde{\mathcal{A}} = \Phi^+$ verwenden und dennoch die Homogenitätsgleichung erfüllen zu können, zieht man aus den Wurzeln α_a in euklidischen Koordinaten einen skalaren Vorfaktor $\sqrt{f_\alpha}$ heraus, so dass mit

$$\alpha_a = \sqrt{f_a} \tilde{\alpha}_a \tag{4.1.1}$$

der Kovektoransatz (modulo Polynome zweiten Grades) nun

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^p f_a \tilde{\alpha}_a(x)^2 \ln |\tilde{\alpha}_a(x)| \quad (4.1.2)$$

und WDVV- sowie Homogenitätsgleichungen

$$\sum_{a,b=1}^p f_a f_b \frac{\tilde{\alpha}_a \cdot \tilde{\alpha}_b (\tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{\alpha}_b)_{ij}}{\tilde{\alpha}_a(x) \tilde{\alpha}_b(x)} \tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{\alpha}_b = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\sum_{a=1}^p f_a \tilde{\alpha}_a \otimes \tilde{\alpha}_a = \mathbf{1}_n \quad (4.1.4)$$

lauten. Die Wurzelsysteme Φ werden damit als abstrakte Wurzelsysteme verstanden, so dass die eigentlich relevanten Strukturen in dieser Behandlung weniger bestimmte Lie-Algebren als vielmehr deren Weyl-Gruppen sind. Die Struktur einfacher Lie-Algebren ist über ihre Weyl-Gruppen in Typen *ABCDEFG* klassifiziert (zu Wurzelsystemen und ihrer Klassifikation [HiNe09, Hu72, Ca84]).

Der entscheidende Punkt für den Beweis ist die Tatsache, dass sich alle positiven Wurzeln $\tilde{\alpha}_a \in \Phi^+$ als Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\{0, 1, 2, 3\}$ aus einfachen Wurzeln darstellen lassen und es auf diese Weise nach dem Wurzelketten-Lemma für zwei positive Wurzeln $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ entweder eine dritte als Linearkombination aus diesen gibt oder die beiden senkrecht zueinander stehen, also $\tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2 = 0$.

Ein zweiter wichtiger Fakt ist die Existenz der Coxeterzahl h und ihrer dualen \check{h} , welche

$$\sum_{\tilde{\alpha} \in \Phi^+} 2 \frac{\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\alpha}} = h \mathbf{1} \quad \text{sowie} \quad \sum_{\tilde{\alpha} \in \Phi^+} \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha} = \check{h} \mathbf{1} \quad (4.1.5)$$

erfüllen.

Damit lässt sich die Summe in den algebraisierten WDVV-Gleichungen (3.3.20) nun nach den Argumenten zu (3.5.6, 3.5.8) in Teilsummen über Kovektoren gleicher Ebenen zerlegen.

Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall der *ADE*-Wurzelsysteme, deren Wurzeln alle von der Länge $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\alpha} = 2$ sind und damit jeweils gleichseitige Dreiecke bilden. Daher gilt aber für die drei Kovektoren in einer

Ebene mit geeigneten Vorzeichen

$$\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 = 0, \quad (4.1.6)$$

woraus sich des Weiteren

$$\tilde{\alpha}_1 \wedge \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_2 \wedge \tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_3 \wedge \tilde{\alpha}_1 \quad , \quad \tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_2 \cdot \tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_3 \cdot \tilde{\alpha}_1 \quad (4.1.7)$$

ergibt. Aufgrund dieser Identitäten lässt sich die Teilsumme solcher drei Kovektoren als

$$\sum_{a,b=1}^3 f_a f_b \frac{\tilde{\alpha}_a \cdot \tilde{\alpha}_b (\tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{\alpha}_b)_{ij}}{\tilde{\alpha}_a(x) \tilde{\alpha}_b(x)} \tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{\alpha}_b = \quad (4.1.8)$$

$$\tilde{\alpha}_1 \cdot \tilde{\alpha}_2 (\tilde{\alpha}_1 \wedge \tilde{\alpha}_2)_{ij} (\tilde{\alpha}_1 \wedge \tilde{\alpha}_2) \left(\frac{f_1 f_2}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_2(x)} + \frac{f_3 f_2}{\tilde{\alpha}_3(x) \tilde{\alpha}_2(x)} + \frac{f_1 f_3}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_3(x)} \right) \quad (4.1.9)$$

schreiben. Aufgrund der im *ADE*-Fall identischen Coxeteridentitäten (4.1.5), $h = \check{h}$, lassen sich die Skalierungsfaktoren aber zu allen Wurzeln $\tilde{\alpha} \in \Phi^+$ gleichermaßen zur Erfüllung der Homogenitätsgleichung als $f_a = \frac{1}{h}$ wählen, so dass die Teilsumme (4.1.9) weiter vereinfacht werden kann zu

$$\sim \frac{1}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_2(x)} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_3(x) \tilde{\alpha}_2(x)} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_3(x)} = \frac{(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3)(x)}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_2(x) \tilde{\alpha}_3(x)} = 0. \quad (4.1.10)$$

Damit sind sowohl die WDVV-Gleichungen als auch die Homogenitätsgleichung für *ADE*-Wurzelsysteme erfüllt.

Auf die *BCFG*-Wurzelsysteme lässt sich dieses Argument mit kleinen Modifikationen ebenso verallgemeinern. Der entscheidende Punkt ist hier, dass es einfache Wurzeln zweier Längen gibt, die üblicherweise $\tilde{\alpha}_{lang} \cdot \tilde{\alpha}_{lang} = 2$ und $\tilde{\alpha}_{kurz} \cdot \tilde{\alpha}_{kurz} = \frac{2}{r}$ normiert sind. Dabei ist r die Länge der Wurzelketten der kurzen Wurzeln durch die langen, im Fall von *BCF* ist $r = 2$ und für das *G*-Wurzelsystem $r = 3$. Für $r = 2$ sind dies in jeder Ebene neben Wurzeln $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_{lang}$ und $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_{kurz}$ noch die kurze Wurzel $\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$ und die lange $\tilde{\alpha}_4 = \tilde{\alpha}_1 + 2\tilde{\alpha}_2$. Mittels deren in der jeweiligen Cartan-Matrix enkodierten sechs Skalarprodukten, von denen die zwei zwischen Wurzeln gleicher Länge verschwinden, erhält man die zugehörige Teilsumme in den WDVV-Gleichungen als

$$\begin{aligned} & -\frac{f_1 f_2}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_2(x)} + \frac{f_1 f_3}{\tilde{\alpha}_1(x) (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2)(x)} + \frac{f_4 f_2}{(\tilde{\alpha}_1 + 2\tilde{\alpha}_2)(x) \tilde{\alpha}_2(x)} + \frac{f_4 f_3}{(\tilde{\alpha}_1 + 2\tilde{\alpha}_2)(x) (\tilde{\alpha}_1(x) + \tilde{\alpha}_2)(x)} \\ = & \frac{2\tilde{\alpha}_1(x)^2 (f_2 f_4 - f_1 f_2) + 2\tilde{\alpha}_2(x)^2 (f_1 f_3 - f_1 f_2) + \tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_2(x) (f_1 f_3 + f_4 f_2 + f_4 f_3 - 3f_1 f_2)}{\tilde{\alpha}_1(x) \tilde{\alpha}_2(x) \tilde{\alpha}_3(x) \tilde{\alpha}_4(x)} \end{aligned}$$

und sieht durch Koeffizientenvergleich direkt, dass dies nur für

$$f_1 = f_4 =: f_{lang} \quad (4.1.11)$$

$$f_2 = f_3 =: f_{kurz} \quad (4.1.12)$$

verschwindet. Damit sind die WDVV-Gleichungen erfüllt, denn im noch ausstehenden Fall der G_2 hat man lediglich eine Ebene und direktes Ausrechnen bestätigt vollkommen analog (4.1.11, 4.1.12).

Um der Homogenitätsgleichung ebenso zu genügen, kann man wie im ADE -Fall schlicht, die duale Coxeterzahl nutzend, alle Vorfaktoren gleichermaßen

$$f_{lang} = f_{kurz} = \frac{1}{\check{h}} \quad (4.1.13)$$

setzen. Darüber hinaus lassen sich aber die Summen in den beiden, nun voneinander verschiedenen Coxeteridentitäten (4.1.5) in die Teile von Kovektoren langer und kurzer Länge zerlegen. Durch Umformung sieht man dann, dass sie unabhängig voneinander proportional zur Identität sind,

$$(r-1) \sum \tilde{\alpha}_{lang} \otimes \tilde{\alpha}_{lang} = (r\check{h} - h)\mathbf{1} \quad (4.1.14)$$

$$(1-r) \sum \tilde{\alpha}_{kurz} \otimes \tilde{\alpha}_{kurz} = (\check{h} - h)\mathbf{1}. \quad (4.1.15)$$

Das bedeutet aber, dass man in der Homogenitätsgleichung

$$f_{lang} \sum \tilde{\alpha}_{lang} \otimes \tilde{\alpha}_{lang} + f_{kurz} \sum \tilde{\alpha}_{kurz} \otimes \tilde{\alpha}_{kurz} \quad (4.1.16)$$

$$= f_{lang} \frac{r\check{h} - h}{r-1} \mathbf{1} + f_{kurz} \frac{h - \check{h}}{r-1} \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (4.1.17)$$

zu der Lösung (4.1.13) noch beliebige, durch ein $t \in \mathbb{R}$ parametrisierte Vielfache der Koeffizienten in (4.1.17) zu den Skalierungsfaktoren hinzuzugaddieren kann, so dass sie sich in der Homogenitätsgleichung gegenseitig wegheben:

$$f_{lang} = \frac{1}{\check{h}} + (\check{h} - h)t, \quad f_{kurz} = \frac{1}{\check{h}} + (r\check{h} - h)t. \quad (4.1.18)$$

Die Homogenitätsgleichung liefert als allgemeine Wurzelsystemlösung für $BCFG$ also gleich eine Einparameterfamilie von Lösungen, wobei der Grund

hierfür eine relative Skalierungsfreiheit des Längenverhältnisses zwischen langen und kurzen Wurzeln ist. Auf diese Weise werden insbesondere die Lösungen zum B - und C -System identisch, da sie sich nur im Längenverhältnis zwischen kurzen und langen Wurzeln unterscheiden. Das G - und F -System werden durch Inversion dieses Längenverhältnis in sich selbst abgebildet, so dass man den Parameterbereich effektiv auf $t \in \mathbb{R}_0^+$ halbieren kann.

Wie weiter oben schon angesprochen demonstriert diese Argumentation, dass genuine Eigenschaften halbeinfacher Lie-Algebren, wie beispielsweise die Killing-Form überhaupt nicht verwendet werden müssen, sondern die Spiegelgruppen der abstrakten Wurzelsysteme, die Weylgruppen, für den Beweis entscheidend sind und ausreichen. Für diese gibt es mit dem Begriff der endlichen Coxeter-Gruppe eine natürliche Verallgemeinerung.

Der Begriff einer *Coxeter-Gruppe* \mathcal{G} abstrahiert zunächst von einer speziellen Darstellung als Spiegelgruppe und ist durch die Präsentation

$$\mathcal{G} := \langle s_1, s_2, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle \quad (4.1.19)$$

mit $m_{ii} = 2$ und $m_{ij} \geq 2$ für $i \neq j$ definiert. Dabei ist zunächst $m_{ij} = \infty$ auch zugelassen in dem Sinn, dass keine Relation für $(s_i s_j)^m$ gefordert wird. Über die zusätzliche Forderung $m_{ij} < \infty$ sind dann gerade *endliche* Coxeter-Gruppen definiert.

Während die Winkel zwischen den Wurzeln respektive Spiegelachsen in Weyl-Gruppen aufgrund des Wurzelketten-Lemmas auf

$$\angle \in \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ\} \quad (4.1.20)$$

beschränkt sind, unterliegen Darstellungen von Coxeter-Gruppen zunächst keiner derartigen Einschränkung. Die endlichen Coxeter-Gruppen sind jedoch klassifizierbar und entsprechen gerade den Weylgruppen zusammen mit drei weiteren Typen: Die dihedrale Gruppe $I_2(p)$ als Symmetriegruppe regulärer $2p$ -Ecke, die Symmetriegruppe des Ikosaeders beziehungsweise Dodekaeders H_3 und jene des 120- beziehungsweise des 600-Zellers in vier Dimensionen H_4 .

Der Beweis, dass Coxeter-Gruppen allgemein Lösungen der WDVV-Gleichungen darstellen, wurde erstmals in [Ve01] geführt. Da die Verallgemeinerung von Weyl- auf Coxeter-Gruppen aber nur in den drei Beispielen

$I_2(p)$, H_3 und H_4 besteht, kann man diese drei Fälle analog zur obigen Betrachtung der Weyl-Wurzelsysteme auch einfach explizit prüfen.

4.2. Deformierte und verallgemeinerte Wurzelsysteme

Im Fall der *BCFG*-Wurzelsysteme ergab sich im vorigen Abschnitt aus einer einfachen Überlegung, dass die Lösungen der WDVV-Gleichungen inklusive Homogenitätsgleichung eine ganze kontinuierliche Parametergruppe von Lösungen darstellen; dies veranlasst prinzipiell zur Annahme, dass die Lösungen aus den Wurzelsystemen Teil eines höherdimensionalen Modulraums sein können. Außerdem kann man über einen verallgemeinerten Begriff von Wurzelsystemen auch Lösungen zu kontragradierten Lie-Superalgebren finden. Im Folgenden soll hierzu der Stand der Dinge in der Literatur zusammengetragen und die bekannten Lösungen mit ihren Modulräumen aufgelistet werden.

Die Kenntnis verschiedener Klassen solcher deformierten Wurzelsysteme ist in erster Linie einer bislang nicht vollständig verstandenen Beziehungen zwischen WDVV-Kovektorlösungen und integrierbaren Calogero-Moser-Sutherland-Modellen (CMS) zu verdanken. In [VFC96] wurden Deformationen des Calogero-Moser Quantenproblems für *ABC*-Wurzelsysteme gefunden, welche überraschenderweise auch schon Lösungen der WDVV-Gleichungen darstellen [Ve99]. Es stellte sich jedoch heraus, dass nicht jede CMS-Deformation einer WDVV-Lösung entspricht [ChVe01] und in [Ve02] wurde ein Kriterium für CMS-Operatoren bewiesen, welches garantiert, dass solche Deformationen auch WDVV-Lösungen darstellen.

Während in der zitierten Literatur die WDVV-Gleichungen nur aus dem Kontext zweidimensionaler topologischer Feldtheorie sowie Seiberg-Witten-Theorie bekannt war, erhält dieser Zusammenhang zwischen CMS-Theorie und WDVV-Gleichungen im neuen Kontext der $\mathcal{N} = 4$ SCQM eine unmittelbare Plausibilität; schließlich handelt es sich hierbei um eine supersymmetrische Verallgemeinerung von Calogero-Modellen, und die konkreten $U \neq 0$ -Lösungen, welche in [KLP09, GLP09] für $n = 2, 3$ gefunden wurden, legen die Vermutung nahe, dass sich allgemein zu den in *F* quadratischen Quantenkorrekturen zum bosonischen Potential in (3.1.1) auch U -Lösungen mit einem bosonischen Potential (3.1.2) finden lassen,

welches zu diesem proportional ist. In diesem Sinne könnte man vermuten, dass die WDVV-Gleichungen die spezielle Einschränkung der Calogeroartigen Modelle ausmacht, welche $\mathcal{N} = 4$ supersymmetrische Erweiterungen erlauben, und dass dies in einem Zusammenhang mit dem Kriterium an die CMS-Operatoren aus [Ve02] steht. Hierzu müsste aber noch der genaue Zusammenhang zwischen superkonformer Symmetrie des Modells und seiner Integrabilität analysiert werden.

Explizit sind die bekannten Deformationen für die ABC -Wurzelsysteme in der Notation von [Ve99, ChVe01] schließlich

$$A_n(c) = \{\sqrt{c_i c_j}(e_i - e_j) | 1 \leq i < j \leq n + 1\} \quad (4.2.1)$$

$$\cong \{\sqrt{c'_i c'_j}(e_i - e_j), \sqrt{c'_i} e_i | 1 \leq i < j \leq n\} \quad (4.2.2)$$

$$(p = \frac{n(n+1)}{2}) \quad (4.2.3)$$

als Deformation des A_n -Wurzelsystems und

$$B_n(\gamma, c) = \{\sqrt{c_i c_j}(e_i \pm e_j), \sqrt{2c_i(c_i + \gamma)} e_i | 1 \leq i < j \leq n\} \quad (4.2.4)$$

$$(p = n^2) \quad (4.2.5)$$

für BC_n , wobei $c_i, \gamma \in \mathbb{R}$ die Modulraumparameter und $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Basisvektoren des n -dimensionalen V^* sind. Es stellt sich weiterhin heraus, dass auch die Deformationen von D_n in letzterem als Spezialfall enthalten sind.

Der Vollständigkeit halber soll hier auch noch konkret der gemäß (4.1.18) eindimensionale Modulraum zu

$$F_4(t) = \{e_i \pm e_j | 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \\ (p = 24) \quad \{2te_1, 2te_2, 2te_3, 2te_4, t(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\} \quad (4.2.6)$$

in dieser Notation angegeben werden. Für diesen ist in [FeVe07] auch gezeigt, dass er bereits der maximal mögliche Modulraum ist. Etwaige Deformationen der E -Wurzelsysteme wurden soweit bekannt noch nicht untersucht. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass sie nicht deformierbar sind, weil sie gegenüber den A - und D -Systemen gleicher Dimension n aus deutlich mehr Wurzeln bestehen und entsprechend mehr Projektorgleichungen (3.5.12) erfüllen müssen.

Neben der Deformation von Coxeter-Wurzelsystemen ist ein weiterer fruchtbarer Ansatz für Kovektorlösungen der WDVV-Gleichungen die Verallgemeinerung des Begriffs des Wurzelsystems im Sinne von Serganova [Se96]. Die Klassifikation dieser verallgemeinerten Wurzelsysteme entspricht im Wesentlichen der Klassifikation kontragrader Lie-Superalgebren [FSS00]. Alle diese Wurzelsysteme erlauben CMS-Operatoren mit eindimensionalem Modulraum [ChVe01].

Auch wenn es sich um komplexe Wurzelsysteme handelt, kann man aufgrund der Tatsache, dass die Kovektoren sowohl in der Bilinearform G (3.3.12) als auch im Kovektoransatz (3.3.10) quadratisch auftauchen, reelle WDVV-Lösungen aus ihnen erhalten. Effektiv werden dabei die ungeraden Wurzeln einfach mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert [FeVe08]¹.

Im Allgemeinen kann die Bilinearform G (3.3.12) für Lie-Superalgebren allerdings entartet sein, so dass nicht alle dieser verallgemeinerten Wurzelsysteme auch WDVV-Lösungen sind. Dies betrifft die Lie-Superalgebren $A(n, n)$, $D(n, n+1)$ sowie $D(2, 1; \alpha)$. Trotzdem können deren Deformationen aber ein nichtentartetes G haben.

Nach [ChVe01, FeVe08] sind die WDVV-Lösungen der Wurzelsysteme $A(n, m)$ schon in $A_n(c)$ und die der $BCD(n, m)$ -Systeme in $B_n(\gamma, c)$ enthalten. Neue \vee -Systeme erhält man demnach zu den exzeptionellen Lie-Superalgebren $AB(1, 3)$ und $G(1, 2)$ sowie zu $D(1, 2; \alpha)$; dies sind konkret für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 AB_4(t) &= \{e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, t(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4), & (4.2.7) \\
 (p=18) & \quad \sqrt{2(2t^2+1)}e_1, \sqrt{2(2t^2+1)}e_2, \sqrt{2(2t^2+1)}e_3, \sqrt{\frac{2t^2(t^2-1)}{t^2+1}}e_4\}
 \end{aligned}$$

und für $t \neq 0$

¹Dort wird der Begriff der \vee -Systeme auf \mathbb{C} -Vektorräume erweitert und die Wurzelsysteme werden tatsächlich in aller Allgemeinheit als komplex verstanden. Aus unserer physikalischen Motivation ist dies jedoch nicht sinnvoll und es werden daher die Kovektoren als lineare Abbildungen eingeschränkt auf reelle Vektoren verstanden, was problemlos zu effektiv reellen WDVV-Lösungen führt.

$$\begin{aligned}
G_3(t) &= \{\sqrt{2t+1}e_1, \sqrt{2t+1}e_2, \sqrt{2t+1}(e_1+e_2), \\
(p=13) \quad &\sqrt{\frac{2t-1}{3}}(e_1-e_2), \sqrt{\frac{2t-1}{3}}(2e_1+e_2), \sqrt{\frac{2t-1}{3}}(e_1+2e_2), \\
&\sqrt{\frac{t}{3}}e_3, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_1+e_2 \pm e_3\}.
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Außerdem für $t, s \in \mathbb{R}$ unter Ausschluss des Entartungsfalls $t+s+1=0$

$$\begin{aligned}
D_3(t, s) &= \{e_1 \pm e_2 \pm e_3, \sqrt{2(t+s-1)}e_1 \\
(p=7) \quad &\sqrt{\frac{2(s-t+1)}{t}}e_2, \sqrt{\frac{2(t-s+1)}{s}}e_3\}.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Für alle in diesem Abschnitt aufgelisteten Deformationssysteme wurden die Projektorgleichungen (3.5.12) nachgerechnet (siehe A.1) und auf diese Weise gemäß der in Abschnitt 3.5 demonstrierten Äquivalenz überprüft, dass diese tatsächlich Kovektorlösungen der WDVV-Gleichungen darstellen.

4.3. Restriktionen von Lösungssystemen

In diesem Kapitel wurden bisher mit Coxeter- sowie verallgemeinerten Wurzelsystemen und ihren Deformationen die bekannten Klassen von Kovektorlösungen im Wesentlichen besprochen. Es gibt aber noch eine Technik, wie man von diesen ausgehend zu weiteren Lösungen gelangen kann. In [FeVe07] wird eine Möglichkeit präsentiert, wie man aus bekannten Kovektorlösungen $F_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch Restriktion auf Unterräume $U \subset V$ neue Lösungen erhalten kann. Dies entspricht im Wesentlichen einer Projektion der Lösungssysteme $\mathcal{B} \subset V^*$ auf den dualen Unterraum U^* .

Zur Definition einer solchen Restriktion eines Kovektorlösungs- beziehungsweise \vee -Systems \mathcal{B} benötigt man zunächst den Begriff eines *Untersystems* $\mathcal{C} := \mathcal{B} \cap U^*$ für einen beliebigen Unterraum $U^* \subset V^*$. Das Untersystem enthält gerade die Kovektoren, welche herausprojiziert werden sollen. Daher definiert man den Untervektorraum, auf den das Lösungssystem restringiert werden soll, mittels der durch die $\gamma \in \mathcal{C}$ definierten Normalhyperflächen $\Pi_\gamma = \{x \in V \mid \gamma(x) = 0\}$ als $L_{\mathcal{C}} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}} \Pi_\gamma$. In [FeVe07]

ist nun bewiesen, dass die Einschränkung eines Lösungssystems \mathcal{B} auf $L_{\mathcal{C}}$ zu einem Untersystem \mathcal{C} allgemein wieder ein Lösungssystem darstellt. Das Lösungssystem wird dann mit $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bezeichnet. Der Beweis dafür macht sich gerade die über das zugehörige Präpotential $F_{\mathcal{B}}$ definierte Frobenius-Struktur (3.2.13) zu Nutze.

Das Präpotential ist für ein solche Restriktion nun durch

$$F_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})} := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}} \beta(y)^2 \ln \beta(y)^2 \quad (4.3.1)$$

gegeben. Dabei sind die Kovektoren in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ im Allgemeinen nicht mehr paarweise linear unabhängig voneinander. Linear abhängige Kovektoren $\beta_1, \beta_2 = \lambda \beta_1$ lassen sich für Kovektorlösungen F aber wieder durch ein einziges $\beta = (1 + \lambda)\beta_1$ beschreiben. In diesem Sinne erhält man mit der Restriktion $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ effektiv eine Projektion von \mathcal{B} mit neu skalierten Kovektoren, deren Anzahl aber im Allgemeinen geringer ist als die von $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$.

Die möglichen Restriktionen der bekannten Systeme sind in [FeVe07] auch untersucht worden. Aufgrund der Trivialität des $n = 2$ Falles, sind dafür nur $n \geq 4$ Lösungssysteme von Interesse.

Für die $ABCD$ -Systeme bringt dies zwar keine neuen Lösungen; startet man allerdings mit dem undeformierten A_n -System erhält man bemerkenswerter Weise als Restriktionen im Allgemeinen $A_n(c)$ (4.2.1) mit $c_i \in \mathbb{Z}$. Betrachtet man die zugehörigen Projektorgleichungen (3.5.12) beziehungsweise \vee -Bedingungen (3.5.1) als algebraische Gleichungen in den Variablen c_i , folgt im Sinne der algebraischen Geometrie die Verallgemeinerung auf $c_i \in \mathbb{R}$ einfach durch den Abschluss des Lösungsraums bezüglich der Zariski-Topologie.

Analog erhält man aus den undeformierten BCD -Systemen auch deren Deformationen $B_n(c, \gamma)$ (4.2.4). Erstaunlicherweise lassen sich in diesen Fällen also die Deformation bereits über die Technik der Restriktionen ermitteln. Allerdings ist damit natürlich noch nicht bewiesen, dass damit der vollständige Modulraum schon gefunden ist.

Für das $F_4(t)$ -System ergeben sich zwei äquivalente Restriktionen entlang A_1 -Untersystemen, die durch

$$\begin{aligned} F_3(t) &:= (F_4(t), A_1) = \{e_i \pm e_j, \sqrt{4t^2 + 2e_i}, \\ (p = 13) &\quad \sqrt{2t}(e_1 \pm e_2 \pm e_3) \mid 1 \leq i < j \leq 3\} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

gegeben sind. Dabei besteht die Äquivalenz über $t \rightarrow \frac{1}{2t}$, so dass durch eine Transformation des Systems auch $t = \infty$ ein Lösung darstellt, also $t \in \mathbb{R}P^1$. Für die übrigen relevanten Coxeter-Systeme E_6, E_7, E_8 sowie H_4 sind keine Modulräume bekannt beziehungsweise möglich; aufgrund ihrer hohen Dimension $n \leq 8$ erhält man aus ihnen eine Vielzahl, nach [FeVe08] genau 41 Restriktionssysteme, welche allerdings teilweise in den Deformationsräumen der analysierten Systeme liegen.

Von den Lie-Superalgebra-Systemen ist nur das $AB_4(t)$ -Systems (4.2.7) von Interesse. Es hat ähnlich dem $F_4(t)$ -System Restriktionen bezüglich zweier A_1 -Untersysteme, die hier allerdings verschieden sind, nämlich

$$(AB_4(t), A_1)_1 = \{\sqrt{2}(e_1 \pm e_2), \sqrt{2}t(e_1 \pm e_3), t(e_1 \pm 2e_2 \pm e_3),$$

$$(p = 11) \quad \sqrt{2(2t^2 + 1)}e_1, 2\sqrt{2(t^2 + 1)}e_2, t\sqrt{\frac{2(2t^2 - 1)}{t^2 + 1}}e_3\}$$

sowie

$$(AB_4(t), A_1)_2 = \{e_i + e_j, \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}}(e_i - e_j), \sqrt{2}e_i,$$

$$(p = 10) \quad \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2 + 1}}(e_1 + e_2 + e_3) | 1 \leq i < j \leq 3\} \quad (4.3.4)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Damit ist ein vollständiger Überblick über die Restriktionssysteme gegeben.

Nach aktuellem, gesichertem Kenntnisstand lassen sich also folgende Typen von Kovektorlösungen der WDVV-Gleichungen klassifizieren:

1. Coxeter-Wurzelsysteme
2. Verallgemeinerte Wurzelsysteme
3. Deformationen dieser beiden
4. Restriktionen dieser Wurzelsysteme

Dabei unterliegen die Coxeter- und verallgemeinerten Wurzelsysteme einer endlichen Klassifikation, so dass die resultierenden WDVV-Lösungen vollständig gefunden wurden. Dagegen gibt es nicht für alle ihre Deformationen die Gewissheit, dass sie schon mit den in diesem Kapitel präsentierten

Modulräumen vollständig ausgeschöpft sind. Die Restriktionen aller dieser bekannten Lösungssysteme sind zwar in [FeVe07] umfassend untersucht worden, das Resultat beinhaltet jedoch eine Vielzahl einzelner Fälle, die teilweise in den Modulräumen deformierter Systeme schon enthalten sind, teilweise aber auch eigenständige Lösungen darstellen. Unterm Strich hat man daher einen etwas unübersichtlichen Zoo von Lösungen, wie besonders in der Grafik aller Systeme für $n = 3$ am Ende von [FeVe08] auffällt. Es ist daher eine natürliche Frage, ob die Kovektorlösungen einem, durch die obigen 4 Typen noch nicht erkannten, systematischeren Prinzip unterliegen. Dieser Frage soll im nächsten Kapitel in verschiedenen Ansätzen nachgegangen werden.

KAPITEL 5

DIE STRUKTUR DER WDVV-LÖSUNGEN: POLYTOPE, HYPERGRAPHEN UND MATROIDE

Die WDVV-Kovektorlösungen als \vee -Systeme beziehungsweise Lösungen der Projektorgleichungen wurden bislang nur über Wurzelsysteme von Lie-(Super)Algebren und ihren Deformationen und Projektionen verstanden, es ist aber vollkommen offen, ob damit der gesamte Modulraum der algebraisierten WDVV-Gleichungen (3.3.16) schon gefunden ist. In diesem Kapitel sollen daher alternative Interpretationen über Polytope, Hypergraphen und Matroide versucht werden. Dabei besteht der Ausgangspunkt im Besonderen in den kombinatorischen Eigenschaften der Lösungssysteme, weil diese zusammen mit einer Orthogonalitätseigenschaft das Wesentliche der Lösungen auszumachen scheinen.

5.1. WDVV-Lösungen als Polytope

Die Coxeter-Gruppen sind zunächst Symmetriegruppen von Polytopen, wobei die Wurzeln der Coxeter-Systeme die Spiegelflächen als deren Normalvektoren definieren; sie lassen sich aber auch als Kanten der Polytope selbst verstehen. Damit kann man die Lösungssysteme aus dem letzten Kapitel unter gewissen Voraussetzungen als Polytope interpretieren, was im besonderen für $n = 3$ zu einer besonderen Anschaulichkeit durch Polyeder verhilft. Dies soll im Folgenden demonstriert werden; dabei stellt sich heraus, dass der Polytopbegriff für eine allgemeinere Klassifizierung der Lösungen nur bedingt geeignet ist, da er schon bei der Beschreibung der bekannten Lösungen an seine Grenzen stößt.

Die Idee, Wurzelsysteme als Polytope aufzufassen [Le08a, Le08b], verdeutlicht sich am einfachsten bei der Betrachtung eines Beispiels. Der einfachste nichttriviale Fall ist hierfür das A_3 -System (Abb. 5.1) bestehend

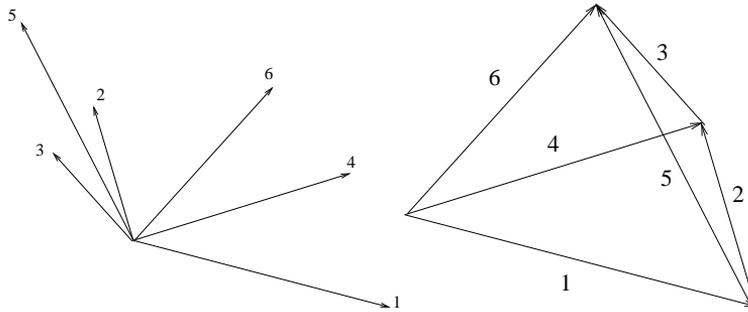


Abbildung 5.1.: A_3 -Wurzeln und der aus ihnen gebildete Tetraeder (mit den Ziffern i werden verkürzt die Kovektoren $\tilde{\alpha}_i$ bezeichnet)

aus $p = 6$ positiven Wurzeln, die sich als Wurzelketten aus den einfachen Wurzeln $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ ergeben. In euklidischen Koordinaten kann man diese Kovektoren $\tilde{\alpha}_i$, welche in vier Dreiergruppierungen jeweils als Dreiecke inzident sind, durch Verschiebung im $V^* \cong \mathbb{R}^3$ zu einem regulären Tetraeder kombinieren, Wurzelsystem der Spiegelsymmetriegruppe und Tetraeder selbst sind in diesem Fall also modulo solcher Translationen identisch.

Gemäß der Argumentation in Abschnitt 4.1 sind die algebraisierten WDVV-Gleichungen (3.3.20) einerseits gerade wegen dieser Inzidenz in Dreiecken, andererseits wegen der Orthogonalität der übrigen drei Paare erfüllt. Daher kann man die Frage nach Deformationen des A_3 -Systems nun ganz anschaulich betrachten, indem man nach Deformationen des Tetraeders sucht, welche die drei Paare jeweils gegenüberliegende Kanten orthogonal zueinander lässt. Nach [Le08a] sind dies gerade die sogenannten *orthozentrischen* Tetraeder und, während der Modulraum beliebiger Tetraeder abgesehen von der Gesamtskala fünfdimensional ist, reduziert er sich durch die drei Orthogonalitätsbedingungen auf drei Parameter. Dies entspricht genau dem Ergebnis (4.2.2) aus der CMS-Theorie, wenn man dort den Parameter für die Gesamtskala vernachlässigt.

Dieses Resultat für Deformationen des orthozentrischen Tetraeders als 3-Simplex lässt sich auf beliebige n -Simplices verallgemeinern. Der entscheidende geometrische Gedanke ist, dass der orthozentrische Tetraeder von 3

Kanten, bestimmt durch ihre 3 Winkel zueinander, aufgespannt wird, beispielsweise in Abbildung 5.1 die Kanten (123). Die Orthogonalität dieser zu ihren gegenüberliegenden Partnern fixiert dann eindeutig sowohl ihre Längen als auch die restlichen Kanten.

Genauso wird der n -Simplex von n Kanten mit $\frac{n(n+1)}{2}$ relativen Winkeln zueinander aufgespannt, von denen aber wiederum nur n Winkel unabhängig sind, wie man sich leicht durch iterative Konstruktion verdeutlichen kann. Deren Längen sowie die restlichen $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten sind durch die Orthogonalitätsforderung dann schon festgelegt. Damit hat man nicht nur den A_3 -Fall, sondern ganz allgemein die möglichen A_n -Deformationen gezeigt in Übereinstimmung mit (4.2.1).

Die Parametrisierung (4.2.2) entspricht dabei in gewisser Weise sogar gerade der beschriebenen Orthogonalitätskonstruktion, nur dass dort die Richtungen der V^* aufspannenden n Kovektoren $\beta_i = \sqrt{c_i}e_i$ durch die Einheitsvektoren $\{e_i\}$ zwar gegeben, die relativen Winkel aber durch deren Längen $\sqrt{c_i}$ über die resultierende Metrik

$$G_{ij} = (1 + \sum_{k \neq i} c_k)c_i\delta_{ij} - c_i c_j \quad (5.1.1)$$

frei parametrisiert sind.

Die Schwierigkeit in nicht-euklidischen Koordinaten besteht allerdings darin, dass in die Metrik auch schon die restlichen, passend gewählten $\frac{n(n-1)}{2}$ Kovektoren eingehen müssen, was eine Konstruktion wie in euklidischen Koordinaten erschwert. Daher war es in [Ve99] auch noch nicht möglich zu zeigen, dass mit dem $A_n(c)$ -System (4.2.1) schon die maximal möglichen Deformationen gefunden sind. Dies leistet erst das Orthozentritätsargument in [Le08a].

Durch diesen Vorzug der Interpretation von Lösungssystemen als Polytope motiviert, ist man geneigt, die folgende Hypothese aufstellen:

- Die Kantenmengen $\{\tilde{\alpha}\}$ von (konvexen) Polytopen stellen Kovektorenlösungen der WDVV-Gleichungen mit konstanter Metrik (3.2.4) dar, wenn sie die Orthogonalitätseigenschaft erfüllen. Diese besteht in der Forderung, dass alle nicht in Flächen inzidenten und nicht linear abhängigen Kanten orthogonal zueinander stehen.

Es hat sich gezeigt, dass die Inzidenz der Kanten in den Flächen ausreicht, um die Teilsummen in den WDVV-Gleichungen (4.1.3) in euklidischen

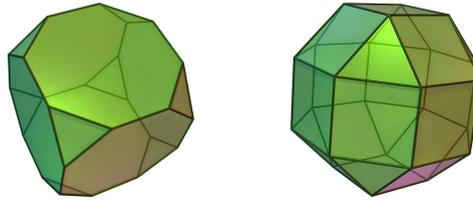


Abbildung 5.2.: Hexaederstumpf und Rhombenkuboktaeder als BC_3 -Polytope

Koordinaten verschwinden zu lassen. Wenn die restlichen Kovektorpaare senkrecht aufeinanderstehen, wird die gesamte Summe zu Null. Für die Skalierungsfaktoren $\sqrt{f_a}$ scheint es genug Freiheit zu geben, sie passend zur Erfüllung der Homogenitätsgleichung (4.1.4) zu wählen. Denn diese besteht als symmetrische Matrixgleichung aus $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Gleichungen, der Simplex als einfachstes Polytop hat jedoch die Mindenzahl von $p = \frac{n(n+1)}{2}$ Kanten und entsprechend genauso viele freie $\sqrt{f_a}$. Daher scheint die Erfüllung der Homogenitätsgleichung für allgemeine Polytope immer möglich zu sein.

Dies ist noch kein Beweis, dass die Hypothese allgemein gültig ist. Stattdessen soll aber lieber ihre Nützlichkeit und ihre Mängel an weiteren Beispielen untersucht werden. Ein neues systematisches Prinzip für die Kovektorlösungen wäre sie schließlich erst dann, wenn die bekannten Lösungen sich auch aus ihr ergeben würden.

Für das BC_3 -System lässt sich ein Polyeder, konstruiert aus den Kovektoren als Kanten, finden, nämlich beispielsweise der sogenannte Hexaederstumpf (Abb. 5.2) [Le08b]. Allerdings erhält man ihn nur, indem man jeden Kovektor vierfach verwendet: in den Ebenen mit zwei langen und zwei kurzen Wurzeln lassen sich durch ihre Verdopplung Achtecke konstruieren, die wiederum verdoppelt zum Hexaederstumpf zusammengesetzt werden können.

Dies verdeutlicht schon ein erstes Problem mit der Polytopinterpretation:

- *Die Konstruktion eines Polytops aus den Kovektoren eines Lösungssystems der WDVV-Gleichungen als Kanten ist nicht immer ohne Kopien der Kovektoren möglich. Insbesondere ist sie nicht eindeutig.*

Im Fall des BC_3 -Systems kann man die Kovektoren zum Beispiel ebenso zu einem Rhombenkuboktaeder (Abb. 5.2) kombinieren. Dann liegen aber die Achtecke nicht als äußere Flächen vor, sondern im Polyederinneren. Da diese aber gerade die für die WDVV-Gleichungen zu prüfenden Ebenen mit vier Kovektoren repräsentieren, muss die Polytophypothese weiter präzisiert werden: Auch innere Flächen scheinen in der Argumentation berücksichtigt werden zu müssen. Die möglichen Deformationen sind aber dieselben wie für den Hexaederstumpf und in [Le08b] explizit ausgeführt; sie entsprechen dem vierdimensionalen Modulraum von $B_3(c, \gamma)$ (4.2.4).

Lassen sich über Polytope unter Umständen neue Lösungen finden? Aufgrund der Fülle der klassifizierten Polytoptypen scheint diese Hoffnung zunächst berechtigt.

Die fünf *platonischen Körper*, bestehend aus lediglich einem Typ regulärer Polygone, lassen sich zunächst analog zum Tetraeder aus den Kovektoren ihrer Spiegelgruppe konstruieren, der Oktaeder aus $D_3 \cong A_3$, explizit betrachtet in [GLP09], und Dodekaeder sowie Ikosaeder aus H_3 . Der Hexaeder ist mit seinen $p = 3$ linear unabhängigen Kanten als Lösungssystem in ohnehin trivial. Sie ergeben sich also direkt aus den bekannten Wurzelsystemen.

Interessanter scheinen die *Archimedischen Körper*, welche aus regulären Polygonen mit verschiedener Seitenzahl bestehen. Zu ihnen zählen Hexaederstumpf und Rhombenkuboktaeder (5.3), ebenfalls aus BC_3 -Wurzeln konstruiert findet sich noch der Kuboktaederstumpf. Ebenso gibt es mit Kuboktaeder, Tetraederstumpf und Oktaederstumpf weitere drei Körper aus den A_3 -Wurzeln sowie eine ganze Reihe von H_3 -Polyedern. Der einzige Archimedische Körper mit nicht direkt einsichtiger Struktur ist der abgeschrägte Hexaeder, es liegt aber die Vermutung nahe, dass er ebenso einem Coxeter-System zugeordnet werden kann.

Geht man weiter zu den dualen Polyedern der Archimedischen Körper, den *Catalanischen Körpern*, so fällt schon beim Triakistetraeder als dualem Körper zum Tetraederstumpf auf, dass sie deutlich mehr linear unabhängige Kanten besitzen, welche die Orthogonalitätsbedingung im Allgemeinen nicht mehr erfüllen können.

Eine Ausnahme davon stellt der Rhombendodekaeder (5.3) dar. In [Le08b] wurde er im Zusammenhang mit dem BC_3 -System als Kombination aus

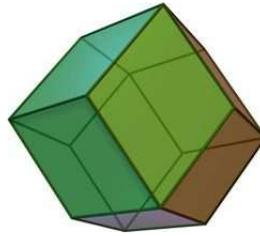


Abbildung 5.3.: Rhombendodekaeder

den drei B_3 -Gewichten der Fundamentaldarstellung und den vier Gewichten der Spinordarstellung konstruiert und ein zweidimensionaler Deformationsraum ermittelt. Allerdings sind in dieser Konstruktion die Vektorgewichte keine äußeren Kanten, sondern liegen als Diagonalen in den äußeren Flächen. Dies erfordert eine entsprechenden Korrektur der Polytophypothese.

Auf den ersten Blick scheint der Rhombendodekaeder aber tatsächlich eine neue $p = 7$ -Lösung hervorzubringen. Auf den zweiten Blick stellt sich jedoch heraus, dass diese Lösung über lineare Transformationen identisch mit dem $D_3(t, s)$ -System (4.2.9) zur Lie-Superalgebra $D(2, 1; \alpha)$ ist. Gleichwohl ist diese Verbindung überraschend und es ist unverständlich, ob es sich um bloßen Zufall oder eine unbekannte Struktur handelt.

Über die erwähnten Polyederklassen hinaus gibt es zwar eine Vielzahl spezieller Polytope, aber eine weitere systematische Betrachtung oder vielversprechende Kandidaten für Lösungssystemen bieten sich kaum an.

Während sich also aus der Polytophypothese keine naheliegenden neuen Lösungen aufdrängen, kann man die umgekehrte Frage stellen, ob alle bekannten Lösungen als Polytope interpretierbar sind. Neben der schon besprochen Ambiguität in den Konstruktionen stößt man hier bei der Betrachtung der Restriktionssysteme bald auf prinzipielle Schwierigkeiten.

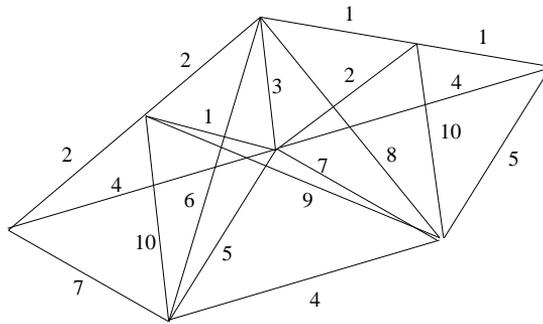


Abbildung 5.4.: Konstruktionsversuch eines Polyeders für $(E_6, A_1 \times A_2)$

Als Beispiel hierfür soll das in [FeVe07] gefundene Restriktionssystem

$$\begin{aligned}
 (E_6, A_1 \times A_2) &= \{ \sqrt{6}(e_1 \pm e_2), 2e_1, 2\sqrt{3}e_3, \frac{1}{2}(\pm 2e_1 + 3e_2 + e_3), \\
 &\quad \frac{\sqrt{3}}{2}(\pm 2e_1 - e_2 + e_3), \frac{\sqrt{2}}{2}(-3e_2 + e_3), \frac{\sqrt{6}}{2}(e_2 + e_3) \} \\
 &\in (AB_4(t), A_1)_2 \qquad (5.1.2)
 \end{aligned}$$

von E_6 mit $p = 10$ Kovektoren betrachtet werden. Versucht man aus diesen vier Flächen aus jeweils vier Kovektoren und sieben Flächen aus drei Kovektoren ein Polyeder zu konstruieren, stellt sich heraus, dass nicht nur nicht alle 11 Flächen nach außen gebracht werden können, sondern dass sich auch nicht alle Kovektoren als äußere Kanten konstruieren lassen (Abb. 5.4, Bezeichnung der Kovektoren über ihre Indizes in der Reihenfolge von (5.1.2)). Insbesondere der neunte Kovektor kann nur zu einer inneren Verstrebung werden. Als Polytop besteht es dann aber maximal aus den neun anderen Kanten und entspricht nicht der Struktur von $(E_6, A_1 \times A_2)$. Dass prinzipiell keine Polytope konstruierbar sind, sieht man direkt in der Betrachtung der fünf möglichen Simplices aus den Kovektoren $\{123789\}$, $\{1237810\}$, $\{1245710\}$, $\{1457910\}$ und $\{2468910\}$ als Grundbausteine möglicher Polytope, die sich in keiner Weise unter Einbeziehung aller 10 Kovektoren zu einer konvexen Gestalt zusammenfügen lassen.

Die Interpretation der Lösungssysteme als Polytope liefert zwar für die Deformationen von A_n über den Begriff orthozentrischer Simplices einen

starken Argumentationsrahmen; darüber hinaus ist aber nicht abzuschätzen, wie sinnvoll er ist. Einige bekannte Ergebnisse reproduziert er auf vielfache Weise, andere lassen sich gar nicht als Polytop verstehen. Insgesamt scheint er daher für die Suche einer Systematik hinter den WDVV-Lösungen wenig fruchtbar.

5.2. Kombinatorik von Lösungen als Hypergraphen

Beim Versuch der Interpretation spezieller Lösungen als Polytope war der entscheidene Schritt die Konstruktion der inzidenten Flächen. Betrachtet man solche Konstruktionen weniger als ein Körper als vielmehr als dessen Skelett, bestehend lediglich aus den Kanten, so sind innere Verstrebungen wie in (5.4) eigentlich kein Problem. Solche Skelette enthalten im Wesentlichen die benötigte kombinatorische Information zu den Inzidenzen der Kovektoren in Flächen. Nicht die Polytope als Körper selbst, sondern ihre kombinatorische Struktur, scheint der Schlüssel zum Problem zu sein.

Die Skelette haben den Vorteil, dass in ihnen die Kovektoren konkret enthalten sind und die Information über Ebenen und zu fordernde Orthogonalitäten damit direkt ablesbar ist; sie haben aber auch einen großen Nachteil: Im Allgemeinen enthalten sie mehrfache Kopien der relevanten p Kovektoren.

Die eigentlich relevante, kombinatorische Struktur eines Lösungssystems \mathcal{B} besteht also vor allem in den linearen Abhängigkeiten seiner Kovektoren untereinander. Das kombinatorische Problem ist also das folgende:

- Eine generische Menge von Kovektoren $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_p\} \subset V \cong \mathbb{R}^n$ wird zunächst durch die prinzipiell möglichen Koplanaritäten der Kovektoren untereinander modulo Permutation beschrieben.
- Für gegebenes n ist zu prüfen, ob die Orthogonalitätseigenschaft erfüllbar ist; diese besteht nun in der Forderung, dass alle Kovektorpaare, für die es keinen weiteren mit ihnen koplanaren Kovektor gibt, simultan jeweils orthogonal zueinander konstruiert werden können.

Da die Kovektoren als solche für dieses kombinatorische Problem irrelevant sind, ist zunächst nur die Indexmenge $X := \{1, 2, \dots, p\}$ zu betrachten. Damit lässt sich die Fragestellung weiter präzisieren: Gesucht sind

Mengen von Teilmengen dieser p -elementigen Menge, also Mengensysteme $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Die leere Menge \emptyset und die einelementigen Mengen sind hier allerdings uninteressant und daher auszuschließen.

Das mathematische Konzept, welches für diese Formalisierung zunächst den besten Rahmen bietet, ist das eines *Hypergraphen* [Be89]:

- Das Paar $H = (X, \mathcal{E})$ aus einer Menge X und einem Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ ist ein Hypergraph, wenn gilt $\bigcup \mathcal{E} = X$.

Der Hypergraph ist eine Verallgemeinerung des Konzepts gewöhnlicher Graphen insofern, als dass jene den Spezialfall lediglich ein- oder zweielementiger Teilmengen in \mathcal{E} bilden.

Einelementige Teilmengen in \mathcal{E} sind also zunächst im Begriff des Hypergraphen enthalten. Diese haben aber für die Kombinatorik der Lösungssysteme keine Bedeutung und können über folgenden Begriff ausgeschlossen werden:

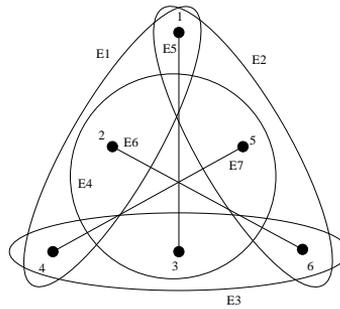
- Ein Hypergraph $H = (X, \mathcal{E})$ heißt *einfach*, wenn es für $E \in \mathcal{E}$ weiter kein $E' \subsetneq E$ in \mathcal{E} gibt.

Da für unsere Zwecke Hypergraphen betrachtet werden, die für jedes $a \in X$ mehrelementige $E \in \mathcal{E}$ enthalten, eliminiert die Forderung nach Einfachheit die einelementigen Teilmengen.

Hypergraphen werden typischerweise dargestellt durch Knoten für die Elemente $a \in X$ und Umkreisungen der Knoten als diese beinhaltende Mengen $E_b \in \mathcal{E}$, wenn sie mehr als zweielementig sind, sogenannte Hyperkanten. Für zweielementige verwendet man Kanten wie bei Graphen. Dies ist für das Beispiel des A_3 -Systems mit Hypergraphen

$$H(A_3) = (\{123456\}, \{\{124\}\{156\}\{235\}\{346\}\{13\}\{26\}\{45\}\}) \quad (5.2.1)$$

in der Abbildung 5.5 mit obiger Nummerierung (Abb. 5.1) demonstriert. Dabei stehen die $a \in \{123456\} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wiederum für Kovektoren $\alpha_a \in A_3(c)$ und die E_b für die vier Ebenen $b = 1, 2, 3, 4$ und die drei orthogonalen Kovektorpaare $b = 5, 6, 7$. Ebenso ist der Hypergraph auch durch seine Inzidenzmatrix $J \in M_{|X| \times |\mathcal{E}|}(\{0, 1\})$ bestimmt mit $J_{ab} = 1$

Abbildung 5.5.: Hypergraph zu A_3

genau dann, wenn $a \in E_b$. Für das A_3 -Beispiel ist dies

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.2)$$

Nicht jeder Hypergraph hat schon die Struktur eines Lösungssystems. Eine wichtige Forderung für die Kombinatorik der Lösungssysteme ist, dass zwei Elemente aus $X = \{1, \dots, p\}$ jeweils nur in genau einer Teilmenge $E_b \in \mathcal{E}$ enthalten sind, weil zwei Kovektoren genau eine Ebene aufspannen. Liegen beispielsweise die Elemente 1, 2, 3 in einer Ebene und sind des Weiteren auch die Elemente 1, 3, 4 koplanar, so ist offensichtlich, dass alle vier in derselben Ebene liegen und daher nur $\{1234\}$ ein erlaubtes Element des Mengensystems ist, nicht aber $\{123\}$ oder $\{134\}$.

In der Sprache der Hypergraphen entspricht dies der Forderung nach linearen Hypergraphen:

- Ein Hypergraph $H = (X, \mathcal{E})$ ist *linear*, wenn gilt $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{E}, E_1 \neq E_2 : |E_1 \cap E_2| \in \{0, 1\}$.

Damit ist also die Eindeutigkeit der Ebenen garantiert. Insbesondere wird eine Ebene mit mehr als drei Kovektoren durch genau ein $E \in \mathcal{E}$, bestehend aus allen Kovektoren, aufgeführt.

Im A_3 -Beispiel könnte man weiterhin ein beliebiges E_b weglassen und hätte immernoch einen Hypergraphen. Für die Kovektorsysteme ist es jedoch wichtig, dass alle Koplanaritäten und Orthogonalitäten angegeben werden. Eine weitere Forderung an Hypergraphen von Lösungssystemen muss also auch die Vollständigkeit der Beschreibung von Koplanaritäten sein:

- Ein Hypergraph soll *vollständig* heißen, wenn $\forall a, b \in X \exists E \in \mathcal{E} : a, b \in E$.

Mit diesen Eigenschaften ist also garantiert, dass man einen Hypergraphen als Träger der Information aller Koplanaritäten einer Menge von Kovektoren interpretieren kann.

Die Darstellung solcher einfacher, linearer, vollständiger Hypergraphen $H = (X, \mathcal{E})$ lässt sich nun noch einfacher gestalten. Man kann sie nämlich in einem weiteren Schritt mit ihrem Unterhypergraphen $\tilde{H} = (X, \tilde{\mathcal{E}})$ identifizieren, der aus allen mehr als zweielementigen Teilmengen $E \in \mathcal{E}$ besteht; aufgrund der Vollständigkeit kann man alle Kovektorpaare ohne gemeinsames $E \in \mathcal{E}'$ dann bereits als solche Paare verstehen. Dies spiegelt die triviale Tatsache wider, dass zwei Kovektoren immer schon koplanar sind. Aufgrund dieser Identifikation

$$\tilde{H} = (X, \tilde{\mathcal{E}}) \equiv (X, \mathcal{E}) = H \quad (5.2.3)$$

kann man in eindeutiger Weise alle Kanten in der Darstellung einfacher, linearer, vollständiger Hypergraphen weglassen, und dafür die Hyperkanten durch Linien ersetzen. Im Beispiel A_3 ergibt dies den deutlich übersichtlicheren Graph (Abb. 5.6).

Schließlich ist man an irreduziblen Systemen interessiert. Die Reduzibilität lässt sich direkt für Hypergraphen formulieren, wobei es die Sache vereinfacht, gemäß der Identifikation (5.2.3) die zweielementigen Teilmengen auszuschließen:

- Ein einfacher, linearer, vollständiger Hypergraph $\tilde{H} = (X, \tilde{\mathcal{E}})$ soll *reduzibel* genannt werden, wenn er von der Form $\tilde{H} = (X, \tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \tilde{\mathcal{E}}_2)$ mit $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cap \tilde{\mathcal{E}}_2 = \emptyset$ ist.

Die Orthogonalitätsforderung kann man leider nicht derart direkt in die Sprache der Mengensysteme und Hypergraphen übersetzen. Dies ist zu-

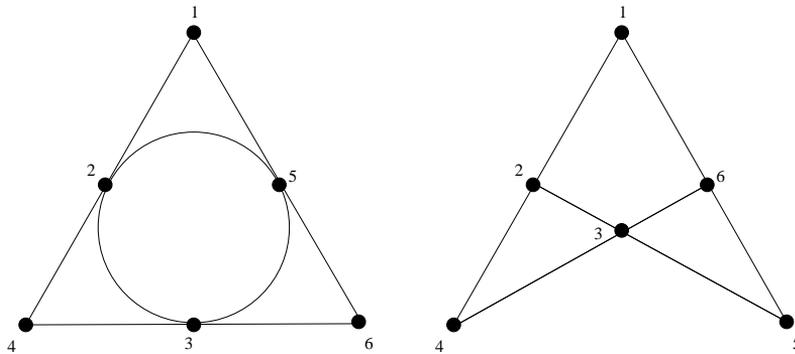


Abbildung 5.6.: a) Alternative Darstellung des A_3 -Hypergraphen und b) ein äquivalentes Diagramm ohne krumme Kanten

nächst nicht weiter verwunderlich, da die Realisierung der Orthogonalitätseigenschaft von der Dimension n des Vektorraums abhängig ist. Insbesondere geht diese Frage genau genommen über das Kombinatorische hinaus.

Im Sinne der Kovektorlösungssysteme ist man also an irreduziblen, linearen und vollständigen Hypergraphen interessiert. Die in einem solchen Hypergraphen enthaltene Kombinatorik ist eine notwendige Voraussetzung für Lösungssysteme.

Eine Klassifikation solcher Hypergraphen, parametrisiert durch $p = |X|$, ist prinzipiell möglich, wengleich die Anzahl der Möglichkeiten mit p schnell wächst. Da in der Theorie der Hypergraphen kaum Resultate solcher Art bekannt sind, lohnt es sich jedoch einen etwas anderen Begriff anstelle der Hypergraphen zu betrachten.

5.3. Matroide

In einem engen Zusammenhang mit dem Begriff des Hypergraphen steht der des Matroids. Matroide wurden in den 1930er Jahren als Versuch, lineare Abhängigkeiten in linearer Algebra abstrakt zu behandeln, eingeführt. Dies scheint auf den ersten Blick genau auf die WDVV-Lösungssysteme zu passen, hat aber den Nachteil, dass durch Matroide nicht nur Koplanari-

täten, sondern auch höhere lineare Abhängigkeiten beschrieben werden. In $n = 3$ Dimensionen entsprechen die geometrischen Darstellungen einfacher Matroide aber genau den einfachen, linearen, vollständigen Hypergraphen des vorherigen Abschnitts.

Im Folgenden sollen die wesentlichen Begriffe aus der Matroidtheorie nach [Ox07, Ho07] vorgestellt werden. Um die Ähnlichkeit mit den Hypergraphen zu betonen, wird eine äquivalente Notation benutzt.

Eine abstrakte Definition für Matroide ist zunächst die folgende: Das Paar $M = (X, \mathcal{U})$ aus einer endlichen Menge X und einem nichtleeren Mengensystem $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ wird als *Matroid* bezeichnet, wenn

1. jede Teilmenge eines Elements in \mathcal{U} wieder in \mathcal{U} ist (Erblichkeitsbedingung) und,
2. falls $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ und $|U_1| = |U_2| + 1$, es ein $a \in U_1 \setminus U_2$ gibt, so dass $U_2 \cup \{a\} \in \mathcal{U}$ (Augmentationsbedingung).

Die Elemente in X lassen sich wie gehabt als Nummerierung von (Ko)Vektoren auffassen, X wird auch *Grundmenge* genannt. Gerade umgekehrt zu den Hypergraphen sind \mathcal{U} aber die *unabhängigen* Mengen, d.h. im Vektorbild Mengen linear unabhängiger Vektoren.

Im Allgemeinen ist allerdings nicht jedes Matroid als Menge von Vektoren über einem Körper k mit linearen Abhängigkeiten darstellbar; ist dies möglich spricht man vom *k -Vektormatroid* $M[A]$ zur Matrix A . Matroide, die über jedem beliebigen Körper darstellbar sind, heißen *regulär*.

Für das Problem der WDVV-Lösungssysteme \mathcal{B} bilden also die über \mathbb{R} darstellbaren Vektormatroide den richtigen Begriff. Insbesondere definieren die zugehörigen Matrizen B aus den Projektorüberlegungen im Abschnitt 3.5 \mathbb{R} -Vektormatroide. Im folgenden wird daher immer von Matroiden $M(\mathcal{B}) := M(B)$ die Rede sein.

Neben Vektormatroiden aus Matrizen kommt eine weitere Klasse fundamentaler Beispiele für Matroide aus der Graphentheorie: Identifiziert man die Menge der Kanten eines Graphen G mit X und entfernt aus $\mathcal{P}(X)$ alle Kreise in G , so erhält man ein passendes \mathcal{U} . Man bezeichnet das Matroid dann auch als *Kreisimatroid* $M[G]$ und nennt umgekehrt jedes Matroid *graphisch*, das isomorph zu einem Kreisimatroid ist.

Ausreichend für die Bestimmung eines Matroids ist aufgrund der Erblichkeitsbedingung schon die Menge der maximalen unabhängigen Mengen,

welche daher auch *Basen* genannt werden. Maximal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Menge durch Hinzufügen eines weiteren Elements abhängig wird, wobei eine Menge als *abhängig* bezeichnet wird, wenn sie nicht unabhängig ist. Deswegen kann man umgekehrt aber auch die Menge der minimalen abhängigen Mengen, als äquivalente Definition verwenden; diese werden als *Kreise* bezeichnet, weil sie für graphische Matroide genau den Kreisen im zugehörigen Graphen entsprechen:

Das Paar $M = (X, \mathcal{K})$ aus einer endlichen Menge X und $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Matroid, wenn folgendes erfüllt ist:

1. $\emptyset \notin \mathcal{K}$,
2. Kein Element in \mathcal{K} ist echte Teilmenge eines anderen Elements in \mathcal{K} ,
3. Sind $K_1 \neq K_2$ Elemente in \mathcal{K} und $a \in K_1 \cap K_2$, dann enthält $(K_1 \cup K_2) \setminus \{a\}$ ein weiteres Element in \mathcal{K} .

Die Äquivalenz der beiden Definitionen ist zwar nicht offensichtlich, lässt sich aber beweisen. Ebenso gibt es noch eine Reihe weiterer äquivalenter Definitionen, naheliegender Weise zum Beispiel mittels der Basen [Ox07, Ho07].

Die Basen sind noch weiter interessant, denn weil alle Basen B dieselbe Kardinalität besitzen, lässt sich der *Rang* eines Matroids M analog zur Dimension in der linearen Algebra als $r_M := |B|$ definieren. Damit kann man auch allgemein den Rang unabhängiger Teilmengen als Basis in Teilmatroiden verstanden als $r_U = |U|$ auffassen. Entsprechend ist der Rang von minimal abhängigen Teilmengen K dann $r_K = |K| - 1$.

Die Definition über ein System von Kreisen enthält die bisherige Beschreibung der Lösungssysteme über ihre Flächen beziehungsweise ihre Hypergraphen. Für das beliebte Beispiel A_3 hat man als Kreissystem

$$\mathcal{K}(A_3) = \{\{124\}\{156\}\{235\}\{346\}\{1236\}\{1345\}\{2456\}\}. \quad (5.3.1)$$

Abgesehen von den vierelementigen Teilmengen entspricht dies dem einfachen, linearen Hypergraphen von A_3 (5.2.1) unter Vernachlässigung der zweielementigen Mengen. Diese Übereinstimmung ist aber dem Spezialfall geschuldet, dass alle linear abhängigen Mengen hier schon minimal sind. Hat man im WDVV-Lösungssystem Ebenen mit vier (oder mehr) Vektoren

wie beispielsweise im B_3 -System, ist nicht die entsprechende vierelementige Menge ein Kreis, da bei Entfernung eines beliebigen Elements immer noch eine abhängige Menge überbleibt. Zur Rekonstruktion der relevanten Informationen muss man daher die Kreise der gleichen Ebene zusammenfügen.

Die zweite Spezialität der Matroide sind Kreise höheren Rangs, im Beispiel $A_{n=3}$ also Rang-3-Kreise. Im Sinne der Matroiddefinitionen sind sie wesentlich; betrachtet man beispielsweise in $\mathcal{K}(A_3)$ die Kreise $K_1 = \{124\}$ und $K_2 = \{156\}$, dann muss definitionsgemäß $(K_1 \cup K_2) \setminus \{1\} = \{2456\}$ auch wieder in $\mathcal{K}(A_3)$ liegen. Dies ist der größere Nachteil des Matroidbegriffs gegenüber dem Hypergraphen, da man auf diese Weise für die WDVV-Lösungen unnötige Struktur dabei hat.

Prinzipiell kann ein Matroid auch ein- oder zweielementige Kreise enthalten. Ersteres entspricht für Kreismatroide $M(G)$ gerade einer Schleife im Graphen G . Zweielementige Kreise dagegen gehören bei Vektormatroiden $M(A)$ zu parallelen Spalten in der Matrix A . Enthält ein Matroid weder ein- noch zweielementige Kreise, wird er als *einfach* bezeichnet. Im Sinne der WDVV-Kovektorlösungen sind also nur einfache Vektormatroide von Bedeutung.

Auch Matroide können in Diagrammen dargestellt werden, so dass A_3 gerade durch Abbildung 5.6 beschrieben wird, in [Ox07] werden sie als *geometrische Darstellungen* bezeichnet¹. Dabei werden tatsächlich auch alle Kreise, deren Elemente die gleiche Ebene repräsentieren, als Knoten auf einer Kante dargestellt. Während die Hypergraphen aber immer als Graphen zweidimensional zu zeichnen sind, gehen in die geometrischen Darstellungen allgemein auch die Kreise höheren Rangs ein; die Knoten der Elemente von Kreisen vom Rang 3 müssen so in einer Ebene des Diagramms liegen. In drei Dimensionen sind also prinzipiell nur geometrische Darstellungen von Matroiden mit maximal Rang 4 möglich. Man gewinnt also effektiv eine Dimension durch die geometrische Darstellung, kann damit auch vierdimensionale Systeme noch in drei Dimensionen darstellen.

Dieser Unterschied soll am Beispiel A_4 demonstriert werden: Während das Diagramm des einfachen, linearen Hypergraphen $\tilde{H}(A_4)$ planar bleibt, ist die geometrische Darstellung des Matroids $M(A_4)$ notwendig ein dreidimensionales Gebilde (Abb 5.7) und enthält sowohl 10 Rang-2-Kreise als

¹In [Ho07] dagegen werden sie *Matroidkonfigurationen* genannt.

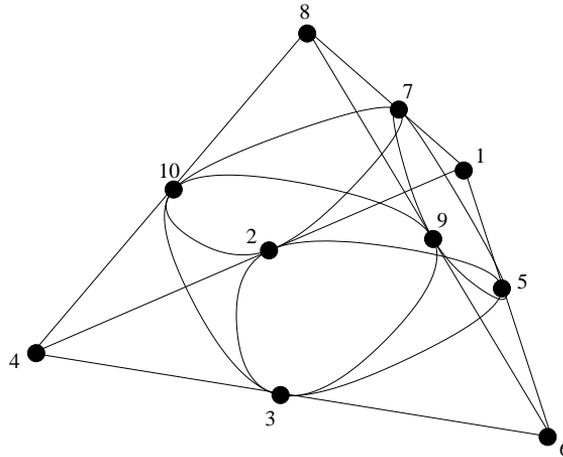


Abbildung 5.7.: Geometrische Darstellung des Matroids $M(A_4)$

Kanten, als auch 5 Rang-3-Kreise, von denen 4 als Flächen dargestellt werden können; der fünfte besteht aus den vier krummen Kanten im Inneren, hier kommen die Möglichkeiten der Darstellbarkeit in Diagrammen an ihre Grenzen. Die geometrischen Darstellungen der Matroide der bekannten Kovektordeformationslösungen für $n = 3$, die also mit den Hypergraphen identisch sind, sind im Anhang A.2 aufgelistet.

Im Sinne der WDVV-Kovektorlösungen ist natürlich über Einfachheit und \mathbb{R} -Darstellbarkeit hinaus noch die Orthogonalitätseigenschaft zu fordern. Die Formulierung dieser Eigenschaft macht im Gegensatz zu den Hypergraphen für Vektormatroide keinerlei Schwierigkeiten:

- Ein Vektormatroid $M(A) = (X, \mathcal{K})$ erfüllt die *Orthogonalitätseigenschaft*, wenn für alle $a, b \in X$, die in keinem gemeinsamen Kreis $K \in \mathcal{K}$ liegen, die Spalten(ko)vektoren α_a und α_b in A orthogonal sind.

So einfach diese Forderung auch zu formulieren ist, so schwer ist es doch allgemeine Implikationen für die Vektormatroide aus ihr zu finden.

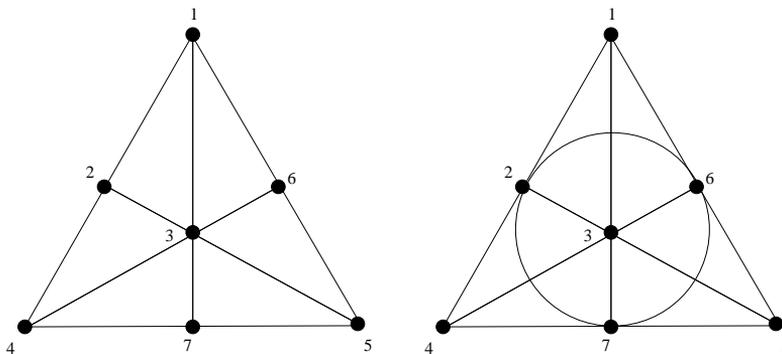


Abbildung 5.8.: a) $M(D_3(t, s)) = F_7^-$, das Non-Fano-Diagramm und b) das Fano-Diagramm F_7

5.4. Vererbung von Matroideigenschaften

Ein entscheidender Vorteil von Matroiden für die WDVV-Lösungen liegt in ihren fundamentalen Operationen, der Kontraktion und dem Löschen von Elementen, unter denen die typischen Matroideigenschaften vererbt werden, so dass sich mit ihnen eine Vielzahl von Resultaten ableiten lassen. Kontraktion und Löschung verallgemeinern die entsprechenden Begriffe aus der Graphentheorie und sollen nun näher erläutert werden.

- Die Löschung $M \setminus a$ eines Elements $a \in X$ aus dem Matroid $M = (X, \mathcal{U})$ ist das Matroid $(X \setminus \{a\}, \mathcal{U}')$ mit unabhängigen Mengen $\mathcal{U}' = \{U \subset X \setminus \{a\} \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Äquivalent bleiben auch alle minimal abhängigen Mengen, die nicht a enthalten im Kreissystem der Löschung erhalten und in geometrischer Darstellung ist dies gleichbedeutend mit der Entfernung eines Knoten und aller seiner Kanten, auf denen dann nur noch zwei weitere Knoten lägen. Als Beispiel kann man dazu

$$M(D_3(t, s)) \setminus \{7\} = M(A_3) \quad (5.4.1)$$

betrachten: Löscht man im Matroiden von $D_3(t, s)$ (Abb. 5.8) den Knoten $a = 7$, erhält man das Matroid von A_3 (in der Form Abb. 5.6b). Die Modulräume dieser beiden Lösungssysteme sind allerdings von unterschiedlicher Dimensionalität.

Im Allgemeinen ist nicht garantiert, dass man durch Löschung wieder einen Vektormatroiden mit Orthogonalitätseigenschaft bekommt. Betrachtet man als eine weitere Löschung $M(A_3) \setminus \{3\}$ in Abbildung 5.6b, bleiben nur die beiden Kanten $\{124\}$ und $\{156\}$ bestehen; dies entspricht als Lösungssystem zwei Dreiecken mit gemeinsamem Kovektor β_1 . In $n = 3$ ist es aber nicht möglich, dass β_2 und β_3 dann gleichermaßen auf β_5 und β_6 senkrecht stehen.

Die zweite wichtige Operation ist die Kontraktion:

- Die Kontraktion $M/\{a\}$ eines Elements $a \in X$ aus dem einfachen Matroid (X, \mathcal{U}) ist das Matroid $(X \setminus \{a\}, \mathcal{U}'')$ mit unabhängigen Mengen $\mathcal{U}'' = \{U \subset X \setminus \{a\} \mid U \cup \{a\} \in \mathcal{U}\}$.

Diese Operation lässt alle unabhängigen Teilmengen $U \in \mathcal{U}$ bestehen und entfernt aus ihnen lediglich jeweils das Element a . Im komplementären Bild der abhängigen Mengen werden dadurch viel mehr Teilmengen entfernt. Es zeigt sich, dass in der geometrischen Darstellung die Kontraktion einem Löschen des Knotens a und der Kanten, auf der er liegt, bei Identifikation der weiteren Knoten auf diesen Kanten entspricht. Als Beispiel kann man hierfür eine Kontraktion von A_3 (Abb. 5.6) betrachten:

$$M(A_3)/\{3\} = M(A_2). \quad (5.4.2)$$

Durch Kontraktion des Knotens $a = 3$ werden nicht nur die zwei Kanten gelöscht, auf denen er liegt, sondern auch der Knoten 2 mit 6 sowie 4 mit 5 identifiziert. Übrig bleibt lediglich eine einzige Kante $\{124\}$, die als Lösungssystem nur ein Dreieck, das A_2 -System repräsentiert.

Für die Kovektorsysteme bedeutet eine Kontraktion also notwendigerweise eine Verkleinerung der Dimension n auf $n - 1$. Zur Illustration ist als weiteres, nichttriviales Beispiel

$$M(A_4)/\{8\} = M(A_3) \quad (5.4.3)$$

sehr hilfreich: Durch Kontraktion des Knoten $a = 8$ im Matroid von A_4 (Abb. 5.7) erhält man gerade das Matroid von A_3 (Abb. 5.6); dabei hätte man mit gleichem Ergebnis auch $a = 7, 9$ oder 10 wählen können, da diese bei der Kontraktion mit Knoten in $M(A_3)$ identifiziert werden.

An diesem Beispiel wird nun sehr anschaulich klar, dass es sich bei Kontraktionen gerade um die Projektionen respektive Restriktionen von Lösungssystemen aus Abschnitt 4.3 handelt. In diesem Kontext ist allgemein

gezeigt worden [FeVe07], dass die Projektionen von A_n -Systemen wieder ein $A_{m \leq n}$ -System zum Resultat hat. Dieses Ergebnis wird nun in den Beispielen (5.4.2, 5.4.3) für deren Kombinatorik in Matroiden reproduziert und es ist eine naheliegende Vermutung, dass sich nicht nur alle Projektionen bekannter Lösungssysteme durch Matroidkontraktion verstehen lassen, sondern dass man umgekehrt ganz allgemein Matroidkontraktion als anschauliche Technik für die Projektionen von Kovektorlösungen verwenden kann. Insbesondere ist durch den Beweis für Projektionen von Lösungssystemen auch schon garantiert, dass sich bei der Matroidkontraktion auch die Orthogonalitätseigenschaft vererbt.

In der Matroidtheorie werden solche Matroide, die durch Kontraktion oder Löschen gebildet werden, *Minoren* genannt. Es gibt eine Reihe von Theoremen über Eigenschaften von Matroiden, die sich auf Minoren vererben. Dazu gehört im Besonderen auch die Darstellbarkeit über einem Körper k . Damit ist die Interpretation der kombinatorischen Eigenschaften von WDVV-Lösungssystemen als \mathbb{R} -darstellbare Matroide eine sehr natürliche.

Es liegt aber die Vermutung nahe, dass die Nützlichkeit von Matroiden noch darüber hinausgeht. Da sich zumindest bei Kontraktionen die Orthogonalitätseigenschaft vererbt und eine solche Vererbung bei bestimmten Beispielen von Lösungen ebenso funktioniert, gibt es berechtigte Hoffnung, dass die Interpretation als Matroid sogar mehr als nur die kombinatorischen Eigenschaften wiedergibt und unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen eine Vererbung der Orthogonalitätseigenschaft auf Minoren auch möglich ist.

Da bislang keine Beispiele für \mathbb{R} -Vektormatroid mit Orthogonalitätseigenschaft bekannt sind, die nicht auch schon die Projektorgleichungen (3.5.12) erfüllen und damit WDVV-Lösungen sind, besteht die Hypothese,

- dass es zu einem jedem \mathbb{R} -Vektormatroid mit Orthogonalitätseigenschaft auch eine WDVV-Lösung gibt.

Lediglich der genaue Modulraum wäre dann noch über die Projektorgleichungen zu bestimmen.

5.5. Klassifikation von Matroiden

Die Interpretation von Lösungssystemen als einfache \mathbb{R} -Vektormatroiden mit Orthogonalitätseigenschaft würde sich besonders dann als fruchtbar erweisen, wenn man mit ihr zu einer Klassifikation der Lösungssysteme käme. Leider besteht ein Großteil der Matroidtheorie aus Ergebnissen zu Vektormatroiden über endlichen Körpern k . Eine solche Klassifikation ist daher noch kaum vorhanden und erfordert einen größeren Aufwand.

Ein naheliegender Ansatz zur Klassifikation von Vektormatroiden besteht in der Konstruktion ihrer geometrischen Darstellungen. Schon im einfachsten Beispiel A_3 ist das konkrete Kreissystem (5.3.1) deutlich unübersichtlicher als seine geometrische Darstellung (Abb. 5.6), vor allem sind Permutationen von X nicht leicht von echt verschiedenen Matroiden zu unterscheiden. In der geometrischen Darstellung bleibt die Gestalt bei Ummummerierung dagegen oft die gleiche. Die geometrische Darstellung wird für $n > 3$ zwar mehr als zweidimensional und ist damit nur schwer zu zeichnen, da die abhängigen Mengen höheren Rangs für die WDVV-Lösungen aber irrelevant sind, kann man immer die Projektionen der geometrischen Darstellungen auf die Ebene (ohne Knoten oder Kanten aufeinander zu projizieren) zur Klassifikation betrachten. Dies entspricht dann aber gerade der Klassifikation der einfachen, linearen, vollständigen Hypergraphen und ist zunächst unabhängig von der (Ko)Vektorraumdimension n .

Ein sinnvoller Ansatz ist also, zunächst alle einfachen, linearen, vollständigen Hypergraphen für ein gegebenes $p = |X|$ aufzulisten und sie dann als Matroide verstanden auf ihre \mathbb{R} -Darstellbarkeit und die Erfüllbarkeit der Orthogonalitätseigenschaft zu überprüfen.

Bei der Konstruktion der Hypergraphen ist die Identifikation modulo Permutation identischer Graphen zwar meist unproblematisch, sie ist aber trotzdem nicht eindeutig. Ein Beispiel sind die beiden äquivalenten A_3 -Hypergraphen (Abb. 5.6).

Um eine eindeutige und effiziente Klassifizierung vorzunehmen, ist es daher zunächst nötig, geeignete unter diesen Äquivalenzrelationen invariante Parameter zu verwenden. Hierzu kommen für einen Hypergraphen in Frage die Anzahl der

- Knoten (Kovektoren) p ,

- Kanten q (für Ebenen, mit drei oder mehr Kovektoren),
- orthogonale Paare k ,
- Knoten mit l anliegenden Kanten p_l ,
- Kanten mit $m \geq 3$ enthaltenen Knoten q_m ,
- der Kanten r_a an einem Knoten a ,
- der Knoten $s_b \geq 3$ auf einer Kante b .

Diese Größen sind nicht unabhängig voneinander und man muss daher schauen, welche Parameter für eine Klassifikation geeignet sind. Relationen sind

$$\sum = \sum_{a=1}^p r_a = \sum_{l=3}^{\infty} p_l \cdot l = \sum_{b=1}^q s_b = \sum_{m=3}^{\infty} q_m \cdot m. \quad (5.5.1)$$

Eine mögliche Klassifizierung von Hypergraphen für ein p wäre also beispielsweise im Parameter \sum . Dies hat den praktischen Vorteil, dass man für ein gegebenes \sum komplementär sowohl Partitionen in r_a und in s_b betrachten kann, wodurch das Ausschließen von Graphen, deren Nicht-Existenz in der einen Partition schwer zu zeigen ist, durch offensichtliche Widersprüche in der anderen Partition erleichtert wird. Insbesondere bietet es sich an, zunächst in den r_a zu zerlegen und bei unklaren Graphen dann zu überprüfen, ob eine s_b -Partition mit $s_b \geq 3$ überhaupt möglich ist.

Auf diese Weise haben wir die einfachen Matroide für $p \leq 8$ explizit aufgelistet und überprüft, welche von ihnen \mathbb{R} -darstellbar sind (Appendix C). Dabei reicht es $n = 3$ zu betrachten, da das einfachste bekannte irreduzible System für $n = 4$ durch A_4 mit $p = 10$ gegeben ist. Unter der zusätzlichen Forderung der Orthogonalitätseigenschaft reproduziert dies gerade die bekannten Lösungssysteme $A_3(c)$ (4.2.1, Abb. 5.6) und $D_3(t, s)$ (4.2.9, Abb. 5.8) sowie $B_3(\gamma, c)$ (4.2.4) mit einem der drei letzten Kovektoren auf Länge Null skaliert, beispielsweise der dritte in $B_3(\gamma = -c_3, c)$ (Abb. 5.9). Da der Verzicht auf einen Kovektor nach der Diskussion des letzten Abschnitts 5.5 der Löschung des entsprechenden Knoten im Matroiden entspricht, kann man dies verstehen als

$$M(B_3) \setminus \{9\} = M(B_3(\gamma = -c_3, c)). \quad (5.5.2)$$

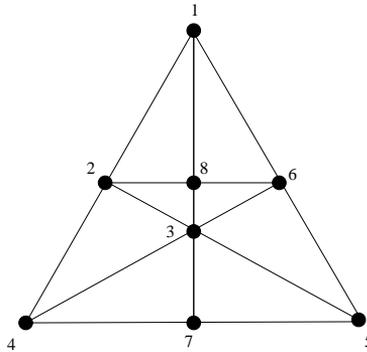


Abbildung 5.9.: Das Matroid $M(B_3) \setminus \{9\}$ zu $B_3(\gamma = -c_3, c)$

Das $D_3(t, s)$ -System ist ein gutes Beispiel dafür, dass man in den Ergebnissen der Matroidtheorie auch für die WDVV-Lösungssysteme relevante Resultate finden kann, obwohl sie sich bislang zum größten Teil mit Vektormatroiden über endlichen Körpern beschäftigt. Denn das $D_3(t, s)$ -Matroid ist als *Non-Fano-Matroid* F_7^- , dem Gegenstück zum Matroid F_7 (Abb. 5.8b) der prominenten Fano-Ebene, der diskreten projektiven Ebene $PG(2, 2)$, bekannt und ein Theorem besagt, dass F_7 nur über $GF(2)$ und F_7^- über allen Körpern außer $GF(2)$ darstellbar ist [Ox07]. Die Orthogonalitätseigenschaft ist für $F_7^- = M(D_3(t, s))$ als Matroid einer WDVV-Lösung dann natürlich noch zu zeigen, was durch die Angabe und Überprüfung einer konkreten Darstellung wie (4.2.9) erfüllt ist.

KAPITEL 6

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurden die WDVV-Gleichungen als spezifische Einschränkung der Modelle $\mathcal{N} = 4$ superkonformer Vielteilchenmechanik untersucht. Dazu wurde zunächst herausgearbeitet, welcher Zusammenhang zu den verallgemeinerten WDVV-Gleichungen aus der Seiberg-Witten-Theorie besteht. Aus der Forderung eines flachen Konfigurationsraums der Vielteilchenmechanik ergab sich dann auf natürliche Weise ein Lösungsansatz über Kovektorsysteme, so dass sich die WDVV-Gleichungen von nichtlinearen Differentialgleichungen zu nichtlinearen algebraischen Gleichungen vereinfachen. Mit den Projektorgleichungen wurden Gleichungen besonders einfacher Form aufgestellt und ihre Äquivalenz zu den WDVV-Gleichungen mithilfe der Veselovsche \vee -Bedingung gezeigt. Weiterhin konnten so über die Wurzelsysteme von Coxeter-Gruppen hinaus auch die als \vee -Systeme bekannten verallgemeinerten Wurzelsysteme und Projektionen von Kovektorsystemen konkret als Lösungen für das Präpotential F der $\mathcal{N} = 4$ superkonformen Vielteilchenmechanik verstanden werden.

Darüber hinaus wurden Ansätze entwickelt, die Lösungssysteme alternativ geometrisch zu interpretieren und den Modulraum der WDVV-Lösungen so besser zu verstehen. Als Ausgangspunkt diente hierfür die kritische Auseinandersetzung mit der Hypothese, die Kovektorsysteme als Kanten von Polytopen aufzufassen. Mit dem Gegenbeispiel des Systems $(E_6, A_1 \times A_2)$ wurde gezeigt, dass der Polytopbegriff allgemein zur Charakterisierung der Lösungssysteme unzureichend ist. Stattdessen wurden mit Hypergraphen und Matroiden neue Konzepte präsentiert. Es wurde ausgeführt, inwieweit einfache, lineare, vollständige Hypergraphen und einfache Matroide äquivalente Begriffe sind und wie sie diagrammatisch durch geometrische Darstellungen repräsentiert werden können. Die Matroidoperationen des Lösens und Kontrahierens konnten geometrisch als Entfernen einer Kante und Projizieren entlang einer Kante interpretiert werden. Schließlich kann-

te die für die Lösungssysteme entscheidende Orthogonalitätseigenschaft für Vektormatroiden präzise formuliert werden. Damit wurde die Grundlage für eine Beschreibung des WDVV-Modulraums durch Klassifikation der Lösungssysteme mittels ihrer Vektormatroiden geschaffen und mit dieser Klassifikation für die Systeme mit $p \leq 8$ begonnen.

Die Klassifikationen für $p \leq 8$ ist natürlich nur ein erster Schritt. Diese wurde durch explizite Überprüfung aller einfachen Matroiden auf Darstellbarkeit und Orthogonalitätseigenschaft erreicht. Für $p > 8$ wird eine Klassifikation der einfachen Matroiden mittels der geometrischen Darstellungen von Hand allerdings schon sehr aufwendig, da ihre Zahl sehr schnell wächst: für $n = 3$ ist sie durch die Folge für $p = 0, 1, 2, \dots, 13$

$$0, 0, 0, 1, 2, 4, 9, 23, 68, 383, 5249, 232928, 28872972 \quad (6.0.1)$$

gegeben ([A058731] in der Sloane-Datenbank) und für beliebige n und $p = 0, 1, 2, \dots, 10$ durch

$$1, 1, 1, 2, 4, 9, 26, 101, 950, 376467$$

gemäß ([A002773]). Es ist allgemein gezeigt worden, dass das Wachsen der Anzahl der einfachen Matroiden von der Größenordnung 2^{2^p} ist [Kn74]. Im Sinne der Lösungssysteme wären hier noch die Matroiden gleicher abhängiger Mengen vom Rang 2 zu identifizieren und die reduziblen Matroiden auszusortieren. Außerdem sind alle bis $p - 1$ aufgelisteten Matroiden auch in der Liste für p wieder enthalten. Ohne diese Verdopplung ist die Folge der Anzahl der einfachen Matroiden

$$0, 0, 0, 1, 1, 2, 5, 14, 45, 315, 4866, \dots \quad (6.0.2)$$

Dennoch steigt die Anzahl der Möglichkeiten derart schnell, dass man zur weiteren Klassifikation nicht ohne Rechnerhilfe und Ideen für geschickte Algorithmen weiterkommt. Insbesondere wäre es von großem Vorteil, in solche Algorithmen auch sofort die Abfrage notwendiger Eigenschaften für \mathbb{R} -Darstellbarkeit und Orthogonalität zu integrieren.

Auf der anderen Seite bringt die Vererblichkeit der Orthogonalitätseigenschaft eine weitere Strategie: Findet man, wie auch immer, einzelne

höherdimensionale \mathbb{R} -Vektormatroiden mit Orthogonalitätseigenschaft, lassen sich unter Umständen in ihren Minoren eine Vielzahl weiterer Lösungen finden.

Ein dritter Ansatzpunkt für neue Resultate mithilfe von Matroiden ist natürlich ein genaueres Studium der Matroidtheorie. So gibt es beispielsweise ein weiteres Theorem, welches besagt, dass sowohl über $GF(2)$ als auch über $GF(3)$ darstellbare Matroiden schon über jedem beliebigen Körper k darstellbar sind. Dies zeigt, dass es durchaus auch aus den Resultaten für Vektormatroiden über endlichen Körpern Implikationen für die WDVV-Lösungssysteme geben kann. Es ist nicht klar, inwieweit es noch weitere Resultate der Matroidtheorie mit Relevanz für das Problem der WDVV-Gleichungen gibt. Daher ist ein vertieftes Studium der Matroidtheorie mit Blick auf die WDVV-Lösungen sicher Gewinn bringend.

Mithilfe der Vektormatroiden lässt sich die kombinatorische Struktur der Koplanaritäten der Kovektorsysteme analysieren und die Orthogonalitätseigenschaft formulieren und überprüfen. Die Gesamtheit der bekannten und hier als Matroiden analysierten Lösungssysteme und die Überlegungen zu Inzidenzen von Kovektoren in Polygonen im Rahmen der Polytopinterpretation legen die Vermutung nahe, dass damit nicht nur notwendige, sondern auch schon hinreichende Eigenschaften für WDVV-Lösungen gefunden sind. Eine Herausforderung besteht aber noch in einem striktem Beweis, dass \mathbb{R} -Vektormatroiden mit Orthogonalitätseigenschaft automatisch auch die Projektorgleichungen erfüllen.

Darüber hinaus bleibt noch die Frage nach Deformationsmöglichkeiten eines gegebenen Lösungssystems; hier gilt es, weitere Techniken zu entwickeln, mit denen die Deformationen aus den Projektorgleichungen ermittelt werden können. Ein möglicher Ansatz besteht in einer störungstheoretischen Betrachtung der Projektorgleichungen durch Variation eines Kovektorsystems mit geeigneten Parametern.

Der Schwerpunkt wurde in dieser Arbeit auf die Bestimmung des Modulraums der WDVV-Gleichungen gelegt. Im Rahmen der $\mathcal{N} = 4$ superkonformen Vielteilchenmechanik ist eine weitere interessante Fragestellung, inwiefern die Erkenntnisse dieser Arbeit zu den WDVV-Lösungen und damit für das Präpotential F Implikationen für die Bestimmung des

zweiten Präpotentials U bei nichtverschwindender zentraler Ladung C mit sich bringt. Bislang wurde dieses nämlich nur für undeformierte Coxeter-Wurzelsysteme betrachtet.

Schließlich ist ein weiterer Aspekt, den besser zu verstehen sich sicher lohnen würde, der Zusammenhang zwischen Integrabilität und supersymmetrischer Erweiterung von mechanischen Vielteilchenmodellen. Während die WDVV-Strukturen sich für uns als Einschränkungen aus der Forderung nach $\mathcal{N} = 4$ superkonformer Symmetrie ergaben und die Integrabilität dieser Modelle nicht primär hinterfragt wurden, sind die \vee -Systeme zwar für die WDVV-Strukturen der Seiberg-Witten-Theorie formuliert, aber aus der CMS-Theorie motiviert. Daher drängt sich die Vermutung auf, dass die WDVV-Gleichungen in gewisser Weise auch eine Verbindung zwischen der Integrabilität und der supersymmetrischen Erweiterbarkeit von Calogero-Modellen herstellen.

ANHANG A

LÖSUNGSSYSTEME UND MATROIDE

A.1. Projektorgleichung und Matroide mit Mathematica

Mit der folgenden Mathematica-Datei wurden alle bekannten Deformationslösungen aus Kapitel 4 überprüft. Die Ausgabe ist hier für den Spezialfall $D_3(t, s)$ aufgeführt. Sie besteht aus der Dimension der $p \times n$ -Matrix B gemäß Abschnitt (3.5), der Matrix selbst (zur Kontrolle); des Weiteren aus der Anzahl der Ebenen q , der $p \times q$ -Inzidenzmatrix für die p Kovektoren in den q Ebenen, die resultierende Anzahl notwendig orthogonaler Kovektorpaare, sowie schließlich einer Matrix, welche die Matroidstruktur zeilenweise in den ersten Spalten enthält sowie in der vorletzten Spalte die Anzahl s_b der Kovektoren in dieser Ebene und schließlich in der letzten Spalte λ_{Π} als Resultat der geprüften Projektorgleichung (3.5.12).

(* Einlesen des Loesungssystems (aus seperater Mathematica-Datei*)

```
A:=D3
d=Dimensions[A]
p=d[[1]];
n=d[[2]];
MatrixForm[A]
```

```
{7, 3}
```

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{-1+s+t} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{\frac{1+s-t}{t}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\sqrt{\frac{1-s+t}{s}} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(* Lösen der Projektorgleichungen *)

G=Transpose[A].A;

Gi=FullSimplify[Inverse[G]];

Module[{qq=0},

Do[

Do[

If[K[[i,k]]≠ 0,qq=k],

{k,1,7}];

A'=Simplify[Table[A[[K[[i,j]]]],{j,qq}]];

P'= A'.Gi.Transpose[A'];

(* Lambda x zur Projektorgleichung P'P' = lambda P' *)

K[[i,9]]=Solve[P'.P'== x P', {x}],

{i,1,q}];

(* K enthält die 2flats, die Anzahl ihrer Elemente und den Eigenwert x *)

MatrixForm[K]

|

6

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

```

(*Ermittlung der 2flat Anzahl q und der 2flats explizit*)
q1=0;
q=0;
Module[{m=0,h,s,qi=0},
Do[
Do[
Do[
If[MatrixRank[{A[[i]],A[[j]],A[[k]]}]==2,m++],
{k,j+1,p}],
{j,i+1,p}],
{i,1,p}];
q1=m;
J=Table[0,{p},{q1}];
m=1;
Do[
Do[
Do[s=False;
If[MatrixRank[{A[[i]],A[[j]],A[[k]]}]==2,
Do[
If[J[[i,r]]==J[[j,r]] == 1,
J[[k,r]]=1;s=True],
{r,1,m}];
If[s==False,
J[[i,m]]=J[[j,m]] =J[[k,m]]=1;m++]
],
{k,j+1,p}],
{j,i+1,p}],
{i,1,p}];
q=m-1;
(*Anzahl der Ebenen q*)
Print[q];
K=Table[0,{q},{9}];
Do[h=1;
Do[
If[J[[j,i]]==1, K[[i,h]]=j; h++],
{j,1,p}];

```

```

K[[i,8]]=h-1;
qi=qi+(h-1)*(h-2),
{i,1,qi};
(*Inzidenzmatrix J*)
Print[MatrixForm[J]];
(* Anzahl der orthogonalen Paare = alle Paare - Paare in Ebenen *)
Print[(p*(p-1)-qi)/2];
|

```

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -\frac{-s-t}{1+s+t} \\ x \rightarrow -\frac{-s-t}{1+s+t} \\ x \rightarrow -\frac{-1-s}{1+s+t} \\ x \rightarrow -\frac{-1-s}{1+s+t} \\ x \rightarrow -\frac{-1-t}{1+s+t} \\ x \rightarrow -\frac{-1-t}{1+s+t} \end{array} \right\} \right\} \right)$$

A.2. Die Matroide der Lösungssysteme

Im Folgenden werden die geometrischen Darstellungen der Matroide zu den bekannten WDVV-Kovektorlösungen aus Kapitel 4 aufgelistet.

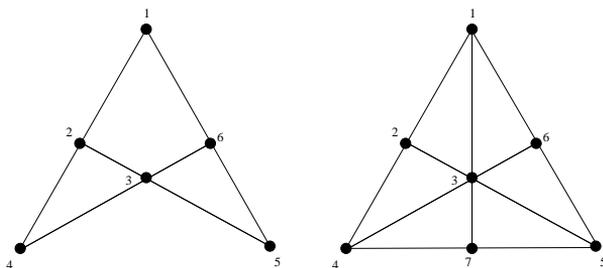


Abbildung A.1.: a) $M(A_3(c))$ und b) $M(D_3(t, s))$

Die Nummerierung von $M(B_3(\gamma, c))$ ist derart gewählt, dass die Löschung (5.5.2) offensichtlich wird und entspricht einer Permutation der Reihenfolge der Kovektoren in (4.2.4). Allgemein wird sonst auf die Wahl

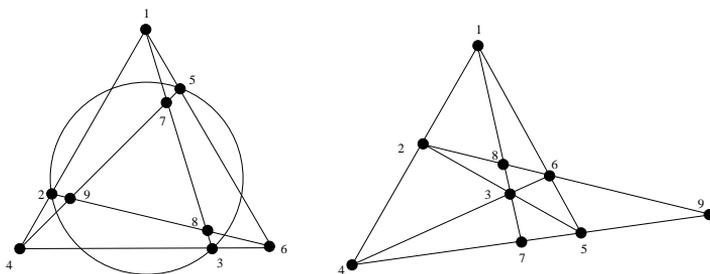


Abbildung A.2.: $M(B_3(\gamma, c))$ a) symmetrisch und b) in äquivalenter Form, aus der sich offensichtlich die Lösung (5.5.2), (Abb. 5.9) ergibt

einer bestimmten Permutation und damit auf eine Nummerierung verzichtet.

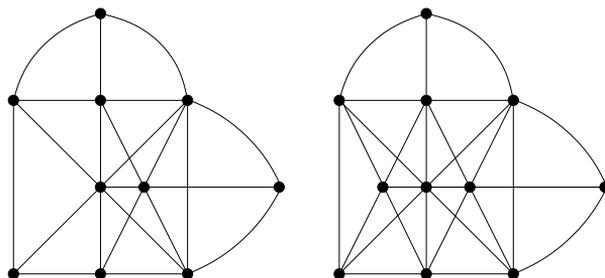


Abbildung A.3.: a) $M((AB_4(t), A_1)_1)$ und b) $M((AB_4(t), A_1)_2)$

Das $F_3(t)$ -Systems hat bis auf die Skalierung der Kovektoren im Wesentlichen die Struktur des Vektormatroids der projektiven Ebene $PG(2, 3)$, nur dass diese über $GF(3)$ dargestellt ist, während $F_3(t)$ als WDVV-Lösung über \mathbb{R} zu verstehen ist. Daher entspricht $M(F_3(t))$ der projektiven Ebene bis auf wenige lineare Abhängigkeiten (Abb. A.4).

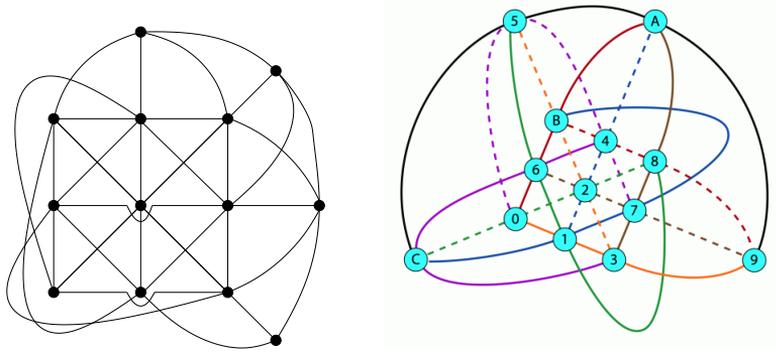


Abbildung A.4.: a) $M(F_3(t))$ und b) die projektive Ebene $PG(2,3)$ (Diagramm von mathpuzzle.com)

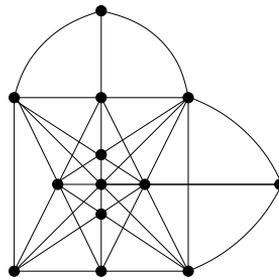


Abbildung A.5.: $M(G_3)$

A.3. Klassifikation der einfachen \mathbb{R} -Vektormatroiden für $p \leq 8$

Für festes p sei auf kanonische Weise $X = \{1, 2, \dots, p\}$. Dann ist das Matroid $M = (X, \mathcal{K})$ durch \mathcal{K} eindeutig bestimmt. Im Folgenden sei immer $n = 3$. Wie in Abschnitt 6 besprochen, sind alle Matroide für $p' < p$ auch Matroide der Klassifikation für p , die Wiederholungen werden hier aber nicht extra aufgelistet; die Anzahl entspricht daher (6.0.2).

$p = 3$:

1. $\mathcal{K}_3 := \{\{123\}\} = M(A_2)$, $\bullet - \bullet - \bullet$ ist das einzige einfache Matro-

id. Als Rang-2-Kreis entspricht es einer Fläche mit drei Kovektoren und ist daher trivialerweise darstellbar und erfüllt die Orthogonalitätseigenschaft. Im folgenden werden die Matroide zu diesen trivialen Kovektorlösungen nach ihrer Kovektoranzahl p immer als \mathcal{K}_p bezeichnet.

$p = 4$:

1. $\mathcal{K}_4 \equiv \{\{123\}\{124\}\{134\}\{234\}\}$ ist trivialerweise darstellbar und orthogonal. 

$p = 5$:

1. $\mathcal{K}_5 \equiv \{\text{alle } \binom{5}{3} = 20 \text{ Kombinationen } \{ijk\}\}$ 
2. $\{\{123\}\{145\}\{2345\}\} = M(A_3) \setminus \{3\}$,  ist das im Abschnitt 5.4 diskutierte Beispiel, darstellbar aber nicht orthogonal.

$p = 6$:

1. \mathcal{K}_6 
2.  darstellbar, aber nicht orthogonal
3.  ist nicht einmal darstellbar, weil die entsprechenden 6 Kovektoren genau den Tetraeder bilden, also auch schon eine vierte Fläche linear abhängiger Kovektoren existiert, die dieser Matroid jedoch nicht enthält.
4.  ist der bekannte und bereits viel diskutierte A_3 -Fall.

$p = 7$: Hier wird eine systematischere Auflistung im Sinne der Diskussion in Abschnitt 5.5 sinnvoll. Da für $p < 9$ jeder Knoten an maximal 3 Kanten liegen kann, bietet sich zur Beschreibung der geometrischen Darstellungen das Tripel (p_1, p_2, p_3) an, wobei die Gesamtzahl $p = p_1 + p_2 + p_3$ fest ist, so dass die Matroide in einer Tabelle mit p_1 - und p_3 -Achse aufgelistet

werden können. Die Summe \sum (5.5.1) steigt dann entlang der Diagonale von links oben nach rechts unten um jeweils eins an. Entsprechend sind auf der dazu senkrechten Diagonalen dieselben Tripel (q_3, q_4, q_5) für die Flächen möglich.

Man erhält insgesamt in Übereinstimmung mit (6.0.1) 14 einfache Matroide. Davon ist nur der $D_3(t, s)$ -Matroid $(p_1, p_2, p_3) = (0, 3, 4)$ darstellbar und orthogonal. Allerdings ist die Argumentation gegen den Fano-Matroiden $(0, 0, 7)$ nicht trivial, der Satz über seine Nicht-Darstellbarkeit über \mathbb{R} daher sehr hilfreich.

$p = 8$: Auch hier reproduziert man die 45 Matroide, von denen sich aber

nur der $(0, 2, 6)$ -Matroid  als darstellbar mit Orthogonalitätseigenschaft herausstellt.

Die Überprüfung, der hier aufgelisteten Matroide legt die Vermutung nahe, dass abgesehen von den trivialen \mathcal{K}_p -Fällen Matroide mit $p_1 > 0$ die Orthogonalitätseigenschaft nicht erfüllen. Für die Matroide mit $p_1 = 0$ und $p_3 < 6$ ergeben sich aus der Annahme der Orthogonalitätseigenschaft ebenfalls offensichtliche Widersprüche. Die Matroide $(0, 1, 7)$ und $(0, 0, 8)$ können direkt ausgeschlossen werden, weil sie den Fano-Matroid als Minoren enthalten und daher nicht darstellbar sind.

$p_3 \setminus p_1$	7	6	5	4	3	2	1	0
0					/			/
1			/	/		/	/	
2			/	/	/	/		/
3				/	/	/	/	/
4					/	/	/	
5						/	/	/
6							/	/
7								

Tabelle A.1.: $p = 7$ einfache Matroide

$p_3 \setminus p_1$	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0									
1			/			/			
2			/	/	/			/	
3				/	/	/	/		
4					/	/	/		/
5						/	/	/	
6							/	/	
7									
8									

Tabelle A.2.: $p = 8$ einfache Matroide

Literaturverzeichnis

- [BeGL04] S. Bellucci, A.V. Galajinsky, E. Latini *New insight into WDVV equation*. Ph+++ys. Rev. D **71** (2005) 044023 [[hep-th/0411232](#)]
- [Be89] C. Berge *Hypergraphs*. North-Holland (1989)
- [Ca84] N. R. Cahn *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. Benjamin-Cummings (1984), [[phyweb.lbl.gov/~rncahn](#)]
- [Ca71] F. Calogero *Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*. J. Math. Phys. **12** (1971) 419
- [ChVe01] O.A. Chalykh, A.P. Veselov *Locus configurations and -systems* Phys. Lett. A **285** (2001) 339–349 [[math-ph/0105003](#)]
- [CDKKT98] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P.K. Townsend, A. van Proeyen, *Black Holes and Superconformal Mechanics*. Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4553 [[hep-th/9804177](#)]
- [Co73] H.S.M. Coxeter *Regular Polytopes*. Dover (1973)
- [DFF76] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan *Conformal Invariance in Quantum Mechanics*. Nuovo. Cim. **A34**, 569-612 (1976)
- [DVV91] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde *Topological Strings in $d < 1$* . Nucl. Phys. B **352** (1991) 59.
- [Du94] B. Dubrovin *Geometry of 2D topological field theories*. In: *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., Vol. 1620, Springer (1996) 120–348 [[hep-th/9407018](#)].
- [FeVe07] M.V. Feigin, A.P. Veselov *Coxeter discriminants and logarithmic Frobenius structures*. Adv. Math. **212** (2007) 143 [[math-ph/0512095](#)]

- [FeVe08] M.V. Feigin, A.P. Veselov *On the geometry of V -systems*. In: Geometry, Topology, and Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224** (2008) 111 [[math-ph/0710.5729](#)]
- [FSS00] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras* Academic Press (2000) [[hep-th/9607161](#)]
- [FrMe90] D. Freedman, P. Mende *An exactly solvable N -particle system in supersymmetric quantum mechanics*. Nucl. Phys. B **344** (1990) 317.
- [GiTo98] G.W. Gibbons, P.K. Townsend *Black Holes and Calogero Models*. Phys. Lett. B **454** (1999) 187 [[hep-th/9812034](#)]
- [GLP06] A. Galajinsky, O. Lechtenfeld, K. Polovnikov *Calogero models and nonlocal conformal transformations*. Phys. Lett. B **643** (2006) 221 [[hep-th/0607215](#)]
- [GLP07] A. Galajinsky, O. Lechtenfeld, K. Polovnikov *$N=4$ superconformal Calogero models*. JHEP **0711** (2007) 008 [[hep-th/0708.1075](#)]
- [GLP09] A. Galajinsky, O. Lechtenfeld, K. Polovnikov *$N=4$ mechanics, WDVV equations and roots*. JHEP **0903** (2009) 113 [[hep-th/0802.4386](#)]
- [HiNe09] J. Hilgert, K.-H. Neeb *An Introduction to the Structure and Geometry of Lie Groups and Lie Algebras*. Unveröffentlichtes Buchskript 2009
- [Ho07] W. Hochstättler *Matroide*. Vorlesungsskript [[zaik.de/AFS](#)]
- [Hu72] J. E. Humphrey *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer 1994, sechste Auflage
- [Kn74] D.E. Knuth *The Asymptotic Number of Geometries*. Journal of Combinatorial Theory B **17** (1974) 398
- [Le08a] O. Lechtenfeld *WDVV solutions from orthocentric polytopes and Veselov systems*. [[hep-th/0805.3245](#)]

- [Le08b] O. Lechtenfeld *$N=4$ Mechanics, WDVV Equations and Polytopes.* [[hep-th/0811.0021](#)]
- [LePo09] O. Lechtenfeld, K. Polovnikov *A new class of solutions to the WDVV equation.* [[hep-th/0907.2244](#)]
- [KLP09] S. Krivonos, O. Lechtenfeld, K. Polovnikov *$N=4$ superconformal n -particle mechanics via superspace.* Nucl. Phys. B **817** (2009) 24 [[hep-th/0812.5062](#)]
- [MaGr99] R. Martini, P.K.H. Gragert *Solutions of WDVV equations in Seiberg-Witten theory from root systems.* J. Nonlin. Math. Phys. **6** (1999) 1 [[hep-th/9901166](#)]
- [Ma98] J. Maldacena *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity.* Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231, [[hep-th/9711200](#)]
- [MMM96] A. Marshakov, A. Mironov, A. Mozorov *WDVV-like equations in $N=2$ SUSY Yang-Mills Theory.* Phys. Lett. **189** (1996) 43 [[hep-th/9607109](#)]
- [MMM97] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov *WDVV equations from algebra of forms.* Mod. Phys. Lett A **12** (1997) 773, [[hep-th/9701014](#)]
- [Mi98] A. Mironov *WDVV Equations in Seiberg-Witten theory and associative algebras.* Nucl. Phys. Proc. Suppl. V.61 (1998) 177 [[hep-th/9704205v1](#)]
- [OlPe83] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov *Quantum integrable systems related to Lie algebras.* Phys. Rep. **94** (1983) 313–404
- [Ox07] James Oxley *What is a Matroid.* (2007) Überarbeitung des gleichnamigen Artikels in: Cubo **5** (2003), 179-218 [[math.lsu.edu/~oxley](#)]
- [Se96] V. Serganova *On generalizations of root systems.* Commun. in Algebra **24**(13) (1996) 4281–4299

- [BFSS96] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker, L. Susskind *M Theory as a Matrix Model. A Conjecture*. Phys. Rev. D **55** (1997) 5112 [[hep-th/9610043](#)]
- [VFC96] A.P. Veselov, M.V. Feigin, O.A. Chalykh: *New integrable deformations of quantum Calogero–Moser* Russ. Math. Surveys **51**(3) (1996) 185–186
- [Ve99] A.P. Veselov *Deformations of the root systems and new solutions to generalised WDVV equations*. Phys. Lett. A **261** (1999) 297 [[hep-th/9902142](#)]
- [Ve01] A.P. Veselov *On geometry of a special class of solutions to generalised WDVV equations*. In: *Integrability: the Seiberg-Witten and Witham equations*, Gordon and Breach (2000), 125-135 [[hep-th/0105020](#)]
- [Ve02] A.P. Veselov *On generalizations of the Calogero–Moser–Sutherland quantum problem and WDVV equations*, J. Math. Phys. **43** (2002) 5675–5682 [[math-ph/0204050](#)]
- [Wi90] E. Witten *On the structure of the phase of two-dimensional gravity*. Nucl. Phys. B **340** (1990) 281.
- [Wy00] N. Wyllard *(Super)conformal many-body quantum mechanics with extended supersymmetry*. J. Math. Phys. **41** (2000) 2826 [[hep-th/9910160](#)]

Danksagung

Diese Arbeit entstand im Laufe der vergangenen zwölf Monate am Institut für Theoretische Physik der Leibniz Universität Hannover. Mein besonderer Dank gilt daher Prof. Olaf Lechtenfeld, der mich hier als Diplomanden aufnahm und in vielen Diskussionen zu jeder Zeit für alle Fragen ein offenes Ohr hatte. Ebenso danke ich Prof. Peter Mayr für die Betreuung dieser Arbeit. Weiterhin danke ich Jun.-Prof. Martin Rubey für die nützlichen Informationen zur Kombinatorik der Matroide und meinem Kodiplomanden Konrad Schwerdtfeger für die Zusammenarbeit.

Weiterhin danke ich der String-Gruppe für die offene Aufnahme, eine angenehme Atmosphäre und viele anregende Gespräche, insbesondere Andre Fischer für Harmonie und Rhythmus im Büro, außerdem Johannes Brödel, Daniel Junghans, Felix Lubbe, Achim Schneider, Thorsten Rahn und Kirsten Vogeler. Kirsten danke ich im Besonderen zusammen mit David Grodzki für aufmerksames Korrekturlesen dieser Arbeit.