Prof. Dr. Manfred Lein
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 16. Mai 2011 vor der Vorlesung

BEISPIELE AUS DER ELEKTROSTATIK

Mittlerweile sind einige Methoden vorgestellt worden, Lösungen von linearen, partiellen Differentialgleichungen mit vorgegebenen Randwerten zu erhalten. Hier sollen einige wenige Beispiele aus der Elektrostatik betrachtet werden.

[H14] *Leitende Kugelschale* **[$3 + 5 + 2 = 10$ Punkte]**

Betrachten Sie wie in [H9] eine Ladung in der Nähe einer leitenden, geerdeten Kugelschale mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung. Die Punktladung Q befinde sich an der Stelle $\vec{y}$, $|\vec{y}| > a$. Das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Gebiet außerhalb der Kugel muss das Randwertproblem $\Phi(|\vec{r}| = a) = 0$ erfüllen. In [H9] haben Sie hergeleitet, dass die Randbedingung mit einer Spiegelladung $Q' = -\frac{a}{y}Q$ an der Stelle $y' = \frac{a^2}{y}$ mit dem Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}\,'|}$$

erfüllt werden kann.

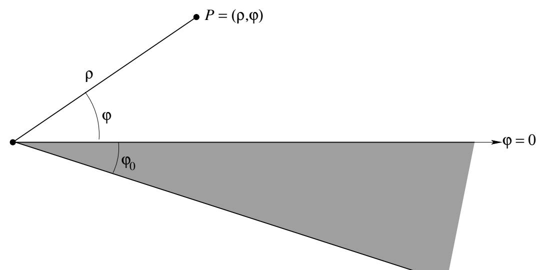
(a) Berechnen Sie das elektrische Feld für dieses System.

(b) Berechnen Sie die auf der Kugeloberfläche induzierte Flächenladungsdichte $\sigma(r\!=\!a, \phi, \theta)$. Was ist die Gesamtladung der Kugel?

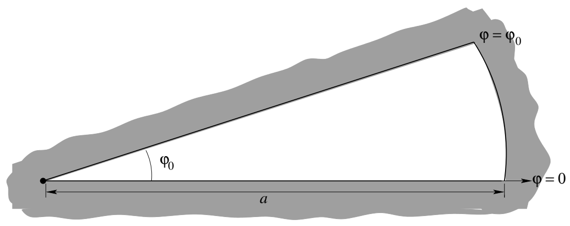
(c) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$, die zwischen der Ladung Q und der Kugel wirkt.

[H15] *Keilförmiger Leiter* **[$6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 3 = 20$ Punkte]**

Ein unendlich langer und hoher leitender Keil mit Öffnungswinkel $\varphi_0 < \pi$ wird auf einem Potential $V_0 = 0$ gehalten.



Geometrie für Teil (a) bis (c)



Geometrie für Teil (d) bis (f)

(a) Finden Sie das Potential in der Nähe der Kante, indem Sie die Laplace-Gleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $\Phi(\rho,\varphi) = R(\rho)F(\varphi)$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) lösen. Vereinfachen Sie dann für kleine Radien ρ. *Hinweise*: Die Geometrie legt nahe, Zylinderkoordinaten mit der z-Achse entlang der Keilkante zu verwenden. Das Problem hängt dann nicht explizit von der z-Komponente ab. Die Laplace-Gleichung lautet daher

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi(\rho,\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\rho,\varphi) = 0\,.$$

(b) Wie verhält sich das elektrische Feld in der Nähe der Kante? Verwenden Sie dazu die Polardarstellung des Gradienten,

$$\nabla = \vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

(c) Was passiert mit dem elektrischen Feld in der Nähe der Kante eines keilförmigen Einschnitts, also für den Fall, dass der Winkel $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ größer als 180° ist?

(d) Wir betrachten nun eine ähnliche Situation: Das keilförmige Gebiet mit Öffnungswinkel φ_0 sei zusätzlich begrenzt durch einen Kreisbogen (genauer gesagt durch einen Abschnitt eines unendlich langen Zylindermantels) bei $\rho = a$. Die beiden Schenkelplatten sind leitend und geerdet. Die Randbedingungen lauten also $\Phi = 0$ auf den Schenkeln, und $\Phi = V(\varphi)$ auf dem Kreisbogen. Wir interessieren uns nun für das ladungsfreie Innere dieses "Tortenstücks" Gehen Sie ähnlich wie in Teil (a) vor, um das Potential innerhalb dieses Gebietes durch $V(\varphi)$ auszudrücken.

(e) Berechnen Sie das Potential für den Fall $V \equiv 1$.

(f) Berechnen Sie das elektrische Feld.