
RANDWERTPROBLEME IN DER ELEKTROSTATIK

In der Vorlesung wurden die Methode der Spiegelladung zur Lösung von Randwertproblemen eingeführt. Dies wollen wir an ein paar Beispielen mit einfacher Geometrie üben. Außerdem wurde mit der Behandlung der Green'schen Funktionen begonnen, die wir uns im Fall nur einer Dimension ansehen wollen.

[P8] *Spiegelladungen I*

Geben Sie mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential für folgende Konfiguration an:

- eine geerdete Metallplatte bei $\{0 \leq x < \infty,\ y = 0,\ z\}$,
- eine geerdete Metallplatte bei $\{x = 0,\ 0 \leq y < \infty,\ z\}$,
- eine Punktladung q an der Stelle $(a, b, 0)$.

Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotentialflächen.

[P9] *Spiegelladungen II*

Wieder befindet sich eine Punktladung q zwischen zwei geerdeten Metallplatten, die aber nun einmal einen Winkel von $60°$ und einmal einen Winkel von $45°$ miteinander bilden.

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Spiegelladungskonfiguration, die die Bedingung $\Phi = 0$ auf den Ebenen erfüllt.

(b) Ist diese Methode für beliebige Winkel zwischen den Ebenen anwendbar?

[P10] *Green'sche Funktion*

Berechnen sie die Green'sche Funktion $G(x, x')$ des Laplace-Operators Δ in *einer Dimension*,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} G(x, x') = \delta(x - x')\,. \tag{1}$$

Betrachten Sie zunächst diese Gleichung separat für $x < x'$ und $x > x'$, wo sie leicht gelöst werden kann. Die Funktion $G(x, x')$ soll weiter die folgenden Eigenschaften besitzen, mit denen Sie zum Teil Integrationskonstanten festlegen können:

- G hängt nur vom Abstand ab, $G(x, x') = G(x - x') = G(\bar{x})$,
- G ist symmetrisch, $G(\bar{x}) = G(-\bar{x})$,
- G ist überall stetig, insbesondere bei $\bar{x} = 0$, d.h., $\lim_{\epsilon \to 0}(G(\bar{x} + \epsilon) - G(\bar{x} - \epsilon)) = 0$.

Eine weitere Bedingung erhalten Sie durch die Integration von Gleichung (1) im Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$. Diese Eigenschaften sind zusätzliche, physikalisch motivierte, Forderungen an die Green'sche Funktion, die deren Eindeutigkeit sicherstellen.