Präsenzübung IV zur Vorlesung ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2011

Prof. Dr. Manfred Lein

06. Mai 2011 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

LEGENDRE-POLYNOME

Orthogonale Systeme von Funktionen spielen in der Physik eine große Rolle, weil oft Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit Randbedingungen als Linearkombinationen von orthogonalen Funktionen geschrieben werden können. Als Beispiel betrachten wir die Legendre-Polynome.

[P11] *Taylorentwicklung*

Das Coulomb-Potential einer Punktladung q an der Stelle $\vec{r}'$ ist von der Form

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,.$$

Wir wollen diesen Ausdruck für den Fall $r \gg r'$ analysieren, also z.B. für den Fall, dass wir sehr weit von der Ladung entfernt sind.

(a) Machen Sie sich klar, dass $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$ geschrieben werden kann als

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r\sqrt{1-2\cos(\theta)\frac{r'}{r}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}\,,$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ ist.

(b) Setzen Sie $x \equiv \cos(\theta)$, und $y \equiv \frac{r'}{r}$. Für $r \gg r'$ ist offenbar $y \ll 1$. Führen Sie damit eine Taylorentwicklung in y durch, die die Form

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n \qquad (1)$$

hat. Führen Sie die Entwicklung bis zum quadratischen Term durch und bestimmen somit P_0, P_1 und P_2. Die Polynome $P_n(x)$ heißen *Legendre-Polynome*.

[P12] *Rekursionsbeziehung*

Die Legendre-Polynome kann man einfacher berechnen, als durch die explizite Entwicklung in (1). Leiten Sie (1) auf beiden Seiten nach y ab und formen Sie um, bis Sie den Ausdruck

$$\frac{x-y}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = (1-2xy+y^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)y^{n-1}$$

erhalten. Setzen Sie auf der linken Seite die Entwicklung (1) ein und setzen die Koeffizienten der jeweils gleichen Potenzen in y gleich, so erhalten Sie die *Bonnet'sche Rekursionsformel*

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,.$$

[P13] *Orthogonalität*

Die Legendre-Polynome können mit Hilfe der Rodrigues-Formel ausgedrückt werden als

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right)\,.$$

Zeigen Sie damit die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,P_m(x)P_n(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}\,.$$

Hinweise: Beachten Sie, dass die Stammfunktion von $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left((x^2-1)^n\right)$ für $0 < k \leq n$ so gewählt werden kann, dass sie jeweils eine Nullstelle an den beiden Integrationsgrenzen -1 und $+1$ hat. Nützlich ist auch die leicht mit partieller Integration zu zeigende Identität

$$I_n \equiv \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,(1-x^2)^n = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,\left(1-\frac{x}{2}(2x)\right)(1-x^2)^{n-1} = I_{n-1} - \frac{1}{2n}I_n\,,$$

mit deren Hilfe I_n rekursiv berechnet werden kann.