Hausübung XII zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2012

Prof. Dr. Norbert Dragon

Abgabe 13.07.2012 in der Präsenzübung — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

---

FERNFELD

In vielen Fällen interessiert man sich nur für die Eigenschaften eines elektromagnetischen Feldes in großer Entfernung zu seiner Quelle. Dies studieren wir hier an einigen einfachen Beispielen. Das Fernfeld ist meist in recht guter Näherung durch die drei ersten Momente charakterisiert, das elektrische und magnetische Diplomomnet und das Quadrupolmoment:

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x}\, \rho(\vec{x})\,, \quad \vec{M} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})\,, \quad Q^{ij} = \int \mathrm{d}^3x\, (3x^i x^j - \delta^{ij}\vec{x}^2)\, \rho(\vec{x})\,.$$

[H27] *Fernfeld eines einfachen Senders* **[$1 + 3 + 2 = 6$ Punkte]**

Wir betrachten zwei entgegengesetzte Ladungen, die spiegelbildlich den Ursprung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω mit Abstand r umkreisen.

(a) Was ist die jeweilige Bahnkurve $\vec{y}(t)$, welche Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ und welche Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ gehört zu einem Teilchen bei $\vec{y}(t)$?

(b) Berechnen Sie damit das elektrische und das magnetische Dipolmoment sowie das Quadrupolmoment.

(c) Berechnen Sie daraus die abgestrahlte Leistung

$$W(t) = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{3}\left|\ddot{\vec{P}}\right|^2 + \frac{2}{3}\left|\ddot{\vec{M}}\right|^2 + \frac{1}{180}\left|\dddot{Q}\right|^2\right)\,.$$

[H28] *Andere Sender?* **[$3 + 3 = 6$ Punkte]**

Hier betrachten wir den Fall bewegter aber gleicher Ladungen.

(a) Berechnen Sie analog zu [H27] die drei Momente zweier Teilchen gleicher Ladung, die spiegelbildlich zueinander längs der x-Achse harmonisch mit der Amplitude ℓ um den Ursprung schwingen. $W =$?

(b) Was sind die drei Momente eines homogen geladenen Kreisringes, der Drehschwingungen mit der Kreisfrequenz $\omega(t) = \Omega\cos(\alpha t)$ ausführt? Was ergibt sich für W ?

[H29] *Poynting-Vektor* **[$2 + 2 = 4$ Punkte]**

Zwei Punktladungen q bei $(0, 0, \ell(t))$ und $(0, 0, -\ell(t))$ haben (vgl. [H28](a)) das Quadrupolmoment

$$Q = 2q\ell^2 \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Sie strahlen in Richtung $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ die folgendermaßen gegebene Energiestromdichte ab: $|\vec{S}| = \frac{1}{16\pi^2}|(\dddot{Q}\,\vec{n})_\perp|^2/(36r^2)$. Dabei bezeichnet $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{v})$ den auf $\vec{v}$ senkrechten Anteil.

(a) Zeigen Sie $(\vec{v}_\perp)^2 = \vec{v}^2 - (\vec{n}\cdot\vec{v})^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Winkelabhängigkeit von $|\vec{S}|$ durch $\cos^2\theta\sin^2\theta$ gegeben ist.

[H30*] *Freiwillige Zusatzaufgabe: Mittelwerte* **[$2^* + 2^* + 2^* + 2^* = 8^*$ Extrapunkte]**

Der Mittelwert einer Funktion $f(\vec{x})$ auf einer Kugeloberfläche (Radius r) sei mit $\langle f\rangle$ bezeichnet,

$$\langle f\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\, f(\vec{x}(\cos\theta,\varphi))\,.$$

(a) Was ist $\langle z^2\rangle$, $\langle z^4\rangle$ und $\langle z^2y^2\rangle$?

(b) Wie vergleicht sich $\langle f\rangle$ mit dem Mittelwert der gedrehten oder gespiegelten Funktion $\langle f\circ T\rangle$, wobei T eine Drehung oder eine Spiegelung ist, zum Beispiel $T : (x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$?

(c) Warum verschwinden Mittelwerte von ungeraden Potenzen von x oder y oder z ?

(d) Welchen Wert haben die Zahlen a und b in den Relationen

$$\langle x^i x^j\rangle = ar^2\delta^{ij}\,, \quad \langle x^i x^j x^k x^l\rangle = br^4(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})\,?$$

Warum müssen dabei die drei $\delta\delta$-Terme mit dem gleichen Faktor auftreten? Bestimmen Sie a und b, indem Sie auf beiden Seiten mit δ_{ij} kontrahieren.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!