
INTEGRATION, WIRKUNGSPRINZIP - TEIL II

Wir üben Integrationsrechnung in mehreren Dimensionen und betrachten das Wirkungsprinzip an einfachen Beispielen.

[H3] *Relativistische Bewegung im elektromagnetischen Feld* **[$2+2=4$ Punkte]**

Aufgabe von letzter Woche: Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich in einem zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L}(t,\vec{x},\vec{v}) = -m\sqrt{1-\vec{v}(t)^2} - qV(\vec{x}) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x})\,.$$

Wie üblich, setzen wir $c=1$.

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall eines freien Teilchens, $V=\vec{A}=0$. Berechnen Sie Energie und Impuls des Teilchens mit Hilfe der entsprechenden Noether-Ladungen.

(b) Berechnen Sie die Euler-Ableitung und zeigen Sie damit, dass die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2}} = q\left(\vec{E}(\vec{x}) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{x})\right)$$

lauten. Wie hängen offenbar $\vec{E}$, $\vec{B}$ mit V und $\vec{A}$ zusammen?

[H5] *Integration über Oberfläche* **[4 Punkte]**

Ein axialsymmetrischer Körper bestehe aus den Punkte (x,y,z) mit

$$x^2+y^2 \le d^2\,,\quad \frac{a}{2}(x^2+y^2) \le z \le h\,.$$

Zeichnen Sie einen Querschnitt. Parametrisieren Sie die Punkte der gewölbten Randfläche durch Polarkoordinaten $\lambda^1 = \rho = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\lambda^2 = \varphi$. Geben Sie die Komponenten der Tangentialvektoren $(t_a)^i = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^a}$, sowie deren Skalarprodukte $g_{ab} = t_a\cdot t_b$ an, $a,b=1,2$. Welche Größe hat das Flächenelement $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\sqrt{\det g}$ für diese Koordinaten? Zeigen Sie schließlich damit, dass

$$F = \int_0^d \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\sqrt{\det g} = \frac{2\pi}{3a^2}\left(\left(1+(ad)^2\right)^{3/2}-1\right)$$

die Gesamtgröße dieser Fläche ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!