

VEKTORFELDER UND ALL DAS

In der Elektrodynamik spielen Vektorfelder eine große Rolle. An einigen physikalischen Beispielen üben wir den Umgang damit.

[H9] Stromdichte**[4 Punkte]**

Aus dem Mittelpunkt eines Zylinders mit Radius R und Höhe h strömt die Stromdichte

$$\vec{j} = J \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.$$

Zeichnen und parametrisieren Sie die Mantelfläche F des Zylinders. Geben Sie zur Berechnung des Stroms durch die Mantelfläche

$$J_{\text{Mantel}} = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int d^2\lambda (t_1 \times t_2) \cdot \vec{j}, \quad (t_a)^i = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^a},$$

den Integranden an. *Hinweis:* Berechnen Sie die Ableitung von $x/\sqrt{1+x^2}$, das könnte Ihnen bei der Auswertung des Integrals nützen ;)

Wie groß ist J_{Mantel} als Funktion von

$$\sin \chi = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}?$$

[H10] Ebene Welle**[1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Im Vakuum hängt das elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{x})$ einer allgemeinen ebenen, elektromagnetischen Welle folgendermaßen von den Argumenten ab:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(u) \quad \text{mit} \quad u = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t,$$

wobei \vec{k} und ω Konstanten sind. Wir nehmen an, dass $\vec{E}(u)$ für ausreichend große u verschwindet.

- Welche Bedingung müssen der Vektor \vec{E} und der Wellenvektor \vec{k} erfüllen, damit die Vakuum-Maxwellgleichung $\text{div} \vec{E} = 0$ erfüllt ist?
- Welchen Wert hat das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(u)$, das ebenfalls für ausreichend große Argumente verschwindet und die Maxwellgleichungen $\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$ und $\text{div} \vec{B} = 0$ erfüllt?
- Welchen Wert muss die Kreisfrequenz ω haben, damit die Vakuum-Maxwellgleichung $\text{rot} \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0$ gilt?
- Zeigen Sie, dass \vec{k} , \vec{E} und \vec{B} paarweise orthogonal sind, und dass das elektrische und magnetische Feld überall und jederzeit gleich groß sind.

[H11] Kontinuitätsgleichung**[4 Punkte]**

Um eine Schallquelle bildet sich eine Stromdichte \vec{j} , die in größerer Entfernung durch

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = A \frac{\vec{r}}{r^3} \cos(kr - \omega t), \quad r = |\vec{r}|,$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die zugehörige Dichte $\rho(t, \vec{r})$, die die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \text{div} \vec{j} = 0$ erfüllt, und die ohne Schallquelle ($A = 0$) konstant wäre.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!