

## INTEGRATION, WIRKUNGSPRINZIP - TEIL II

Weitere Übungen zu Integration und zum Wirkungsprinzip.

**[P4]** *Energiesatz*

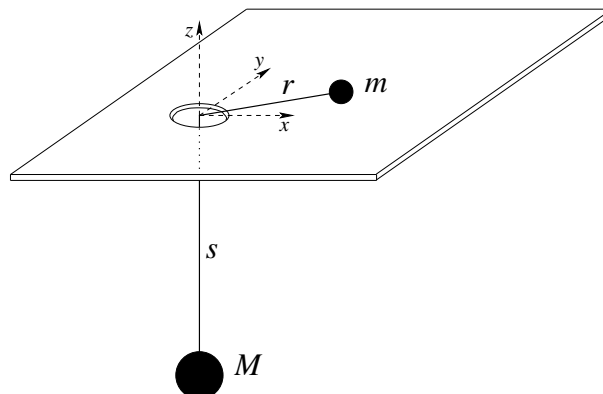
Die Bewegung einer Koordinaten  $x(t)$  unterliege einem Energiesatz der Form

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x).$$

Geben Sie zu Zeiten, zu denen  $x$  zunimmt, die Umkehrfunktion  $t(x)$  als Integral über eine Funktion von  $E$ ,  $m$  und  $V(x)$  an. Lösen Sie das Integral für das spezielle Potential  $V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2$ . Schreiben Sie dabei der Einfachheit halber  $E = \frac{1}{2}\kappa A^2$  und fassen Sie Integrationskonstanten geeignet in einer Größe  $\varphi$  zusammen.

**[P5]** *Verbundene Kugeln*

Zwei Massepunkte  $m$  und  $M$  sind durch ein Seil der Gesamtlänge  $\ell$  und vernachlässigbarer Masse miteinander verbunden. Dieses Seil läuft durch ein Loch in einer horizontal ausgerichteten Tischplatte, in deren Ebene sich die Masse  $m$  reibungsfrei bewegen kann (*Hinweis*: die Masse  $m$  bewegt sich nicht notwendigerweise in gerader Linie zum Loch in der Tischplatte!). Die Masse  $M$  führt ihre Bewegung ausschließlich senkrecht zur Tischplatte und somit parallel zur Richtung des Schwerfeldes der Erde durch.



- Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems in geeigneten Koordinaten an.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und finden Sie zwei unabhängige Erhaltungsgrößen des Systems.
- Nutzen Sie die Erhaltungsgrößen, um die Bewegung durch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zu beschreiben. Eine dieser beiden Gleichungen entkoppelt von der anderen. Geben Sie für diese eine formale Lösung  $t(s)$  bzw.  $t(r)$  an.
- Entnehmen Sie dieser Lösung das effektive Potential der Bewegung und skizzieren Sie es. Diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bewegungen in Abhängigkeit der Erhaltungsgrößen.