INTEGRALSÄTZE

In der Vorlesung haben wir die Integralsätze kennengelernt, die wir uns hier etwas genauer ansehen.

[P6] *Flächenelemente*
Geben Sie $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ in Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

als Linearkombinationen in $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}\varphi$ an. Geben Sie ebenso die Flächenprodukte $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ an. Berücksichtigen Sie dabei, dass das Flächenprodukt bilinear und alternierend ist. Vergleichen Sie auf einer Kugeloberfläche, $\mathrm{d}r = 0$, mit $\vec{e}_r\, \mathrm{d}\cos\theta\, \mathrm{d}\varphi$. Geben Sie schließlich das Volumenelement $\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ in Kugelkoordinaten an.

[P7] *Satz von Stokes*
Es seien A_x und A_y zwei Funktionen auf der Dreiecksfläche $F = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Beim Flächenintegral

$$\int_F \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big(\partial_x A_y(x,y) - \partial_y A_x(x,y)\Big)$$

kann bei jedem Term je eine der Integrationen sofort ausgeführt werden (welche?). Beachten Sie dabei, dass Unter- und Obergrenze dieser Integrationen von der jeweils verbleibenden Integrationsvariablen abhängen. Zeigen Sie, dass das eindimensionale Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}u \Big(A_x(u,0) + A_y(1,u) - A_x(u,u) - A_y(u,u)\Big)$$

übrig bleibt. Hierbei ist die Bezeichnung der Integrationsvariable willkürlich und unwesentlich. Machen Sie sich nun klar, dass bei diesem Beispiel das Flächenintegral über die Rotation

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\, \mathrm{rot}\vec{A} = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}$$

gleich dem Umlaufintegral über die Randkurve ist. Können Sie mit Hilfe dieses Beispiels den Satz von Stokes auch für allgemeine Flächen zeigen?