Prof. Dr. Eric Jeckelmann
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe am 26.04.2013 in der Übung

POTENTIALTHEORIE

Ein grundlegendes Problem in der Feldtheorie ist, aus der Verteilung der Quellen des Feldes das Potential des Feldes zu bestimmen. In der Elektrostatik ist die Lösung dieses Problems durch die Lösung der Poisson-Gleichung gegeben.

[H4] *Laplace in Kugelkoordinaten* **[3 + 3 + 3 = 9 Punkte]**

Erinnern Sie sich zunächst an die Definition der Basisvektoren für krummlinige Koordinaten, $\vec{e}_{u_i} = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$ mit den Normierungen $h_{u_i} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right|$. Schauen Sie ggfls. in [P3](a) vom Übungsblatt I nach, um die h_{u_i} zu identifizieren. Der Nabla-Operator kann nun wie folgt definiert werden:

$$\nabla = \sum_i \vec{e}_{u_i} \frac{1}{h_{u_i}} \partial_{u_i} \,.$$

Mit dieser Definition wird sichergestellt, dass die Anwendung von Nabla zu Ergebnissen führt, die nicht von der Basis abhängen.

(a) Geben Sie den Gradienten $\mathrm{grad}\phi$ einer skalaren Funktion ϕ in Kugelkoordinaten an. Was ergibt sich demnach für $\mathrm{grad} u_i$?

(b) Geben Sie die Divergenz $\mathrm{div}\vec{A}$ eines Vektorfeldes $\vec{A} = \vec{e}_{u_i} A^{u_i}$ in Kugelkoordinaten an. *Hinweis*: berücksichtigen Sie, dass ∇ auch auf die Basisvektoren $\vec{e}_{u_i}$ wirkt. Überprüfen Sie, dass gilt

$$\mathrm{div}(A^r \vec{e}_r + A^\theta \vec{e}_\theta + A^\varphi \vec{e}_\varphi) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 A^r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A^\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi(A^\varphi)\,.$$

(c) Geben Sie nun den Laplaceoperator $\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi$ angewandt auf eine skalare Funktion ϕ in Kugelkoordinaten an,

[H5] *Coulomb-Potential einer Punktladung* **[3 + 2 + 3 = 8 Punkte]**

Wir wollen zeigen, dass eine punktförmige Ladung das Coulomb-Potential hat. Die Possion-Gleichung müsste demnach die folgende Form annehmen:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$ die rechte Seite in der Tat verschwindet, dass also $\Delta\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\int_V \mathrm{d}^3r\,\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0$ ist, solange $\vec{r}\,' \notin V$.

(c) Nun muss noch gezeigt werden, was passiert, wenn $\vec{r}\,' \in V$ liegt. O.B.d.A können wir $\vec{r}\,' = 0$ annehmen. Wir betrachten das Integral $\int_V \mathrm{d}^3r\,\Delta\frac{1}{r}$ für V eine winzige Kugel vom Radius ε, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Verwendeden Sie den Gauß'schen Satz, um das Integral in ein Integral über die Oberfläche der Kugel umzuwandeln und zeigen Sie, dass sich der Wert -4π ergibt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

[H6] *Poisson-Gleichung* **[3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 3 = 15 Punkte]**

Die Poisson-Gleichung reduziert sich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, wenn die Ladungsverteilung radialsymmetrisch ist, d.h. $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ hängt nur vom Abstand ab. Die Poisson-Gleichung lautet $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$. Wir betrachen die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{8\pi\lambda^3}\mathrm{e}^{-r/\lambda}$ für $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung $Q = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r\,\rho(\vec{r})$.

(b) Machen Sie den Ansatz $\phi(\vec{r}) = \frac{y(r)}{r}$, wobei Sie annehmen, dass $y(r) \to \mathrm{const}$ für $r \to \infty$ geht. Welche Differentialgleichung muss $y(r)$ erfüllen?

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung an.

(d) Machen Sie den Ansatz $y(r) = f(r)\mathrm{e}^{-r/\lambda}$ und finden Sie so die Lösung der inhomogenen Gleichung.

(e) Bestimmen Sie die noch freien Parameter aus der allgemeine Lösung des homogenen Problems durch die Randbedingungen $\phi(r \to \infty) \to 0$ und $\phi(r \to 0) \to \mathrm{const}$ endlich. Geben Sie damit $\phi(r)$ in führender Ordnung für $r \to \infty$ und für $r \to 0$ an. *Hinweis*: für den Fall $r \to 0$ gilt $r \ll \lambda$.

(f) Plotten Sie $\rho(r)$ und $\phi(r)$ mit Hilfe von MATHEMATICA. Vergleichen Sie $\phi(r)$ mit dem Potential einer Punktladung mit geeinget gewählter Ladung Q'. Wie groß ist Q' ?

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!