ELEKTROSTATIK

Zeitlich unveränderliche Ladungsverteilungen stellen den einfachsten Fall der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus dar, die Elektrostatik. Bei einfachen oder symmetrischen Ladungsverteilungen kann man mit Hilfe der Multipolentwicklung schnell eine gute Vorstellung davon bekommen, wie das Potential der Ladungsverteilung aussieht.

[H7] *Multipolentwicklung* **[$3 \times 2 + 3 \times 2 = 12$ Punkte]**

In [P2](a) haben Sie bereits eine Form der Multipolentwicklung kennengelernt. Wir betrachten das Potential von N Punktladungen,

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\vec{r} - \vec{r}_i}\,.$$

Für große Entfernungen vom Ladungsschwerpunkt kann dies entwickelt werden in der Form

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}Q\vec{r}}{2r^5} + \mathcal{O}(r^{-4})\,.$$

wobei q die Gesamtladung, $\vec{p}$ das Dipolmoment und Q das Quadrupolmoment bezeichnet.

(a) Berechnen und visualisieren Sie mit MATHEMATICA das Potential und das elektrische Feld in der xy-Ebene für die folgenden Ladungsverteilungen:
- Zwei Ladungen mit umgekehrtem Vorzeichen;
- Vier Ladungen an den Ecken eines Quadrates in der xy-Ebene, wobei die Kanten Ladungen mit umgekehrten Vorzeichen verbinden;
- Fünf bis sechs zufällig verteile Ladungen in der xy-Ebene mit verschwindender Gesamtladung (verwenden Sie RANDOMREAL).

(b) Berechnen Sie für jede der Konfigurationen aus (a) die Dipol- und Quadrupolnäherung des Potentials mit MATHEMATICA, und vergleichen Sie dies mit dem exakten Resultat.

Hinweis: Erzeugen Sie für jede der Konfigurationen Listen der Positionen der positiven und der negativen Ladungen. Schreiben Sie ein Programm, das die Berechnungen für (a) und (b) durchführt.

[H8] *Axiale Symmetrie* **[$3 + 4 + 4 = 11$ Punkte]**

Wir betrachen eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ mit axialer Symmetrie um die z-Achse.

(a) Zeigen Sie, dass der Quadrupoltensor diagonal ist.
(b) Überprüfen Sie, dass gilt: $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz}$.
(c) Berechnen Sie das Potential und die elektrische Feldstärke des Quadrupols als Funktion von Q_{zz}.

Hinweis: Auch wenn es zunächst nicht naheliegend scheint, ist die Wahl von Kugelkoordinaten die beste Wahl. Zeigen Sie, dass der Quadrupoltensor spurfrei ist. Damit folgt in (b) das zweite Gleichheitszeichen, wenn Sie das erste gezeigt haben.

[H9] *Dipole* **[$3 + 3 + 3 = 9$ Punkte]**

Wir betrachten zwei elektrische Dipole. Der erste, $\vec{p}_1$, befinde sich im Ursprung und zeige in die z-Richtung. Der zweite, $\vec{p}_2$, befinde sich an der Stelle $\vec{r}_0 = (x_0, 0, z_0)$.

(a) Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld, die vom ersten Dipol $\vec{p}_1$ erzeugt werden.
(b) Beschreiben Sie den zweiten Dipol als ein Paar entgegengesetzt gleicher Ladungen $\pm q$, die sich an den Orten $\vec{r}_0 \pm \vec{a}/2$ befinden. Berechnen Sie die potentielle Energie diese Dipols im Feld des ersten Dipols, $V_D(\vec{r}_0) = -q\phi(\vec{r}_0 - \vec{a}/2) + q\phi(\vec{r}_0 + \vec{a}/2)$, mit $\phi(\vec{r})$ das Potential aus (a). Führen Sie eine Taylorentwicklung um $\vec{r}_0$ herum aus, und machen Sie den Grenzübergang $\vec{a} \to 0$, $q \to \infty$ zum mathematischen Dipol. Zeigen Sie damit $V_D(\vec{r}_0) = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}(\vec{r}_0)$, mit $\vec{E}$ das elektrische Feld aus (a).
(c) Welche Richtung nimmt $\vec{p}_2$ im Feld von $\vec{p}_1$ ein? *Hinweis*: Die in (b) berechnete potentielle Energie des Dipols $\vec{p}_2$ im Feld des Dipols $\vec{p}_1$ wird für die gesuchte Richtung minimal.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!