RANDWERTPROBLEME

Die Hauptaufgabe der Elektrostatik ist das Bestimmen des Potentials bei gegebener Ladungsverteilung und gegebenen Randwerten. Dafür gibt es eine Reihe guter Methoden, die auch grundsätzlich in der Physik wichtig sind, besonders die Entwicklung nach orthogonalen Funktionen.

[H10] *Kugelflächenfunktionen* **[$3 + 3 + 2 \times 3 = 12$ Punkte]**

In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktion $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ und ihre wesentlichen Eigenschaften erwähnt. Die ersten paar lauten

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,, \qquad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\,,\ \ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\,,$$

$$Y_{2\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\varphi}\,,\ \ Y_{2\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\,,\ \ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\Big)\,.$$

(a) Was können Sie über die Entwicklung eine Funktion $f(\vec{r})$ in Kugelflächenfunktionen sagen, wenn $f(\vec{r})$ jeweils eine der Relationen

$$f(\vec{r}) = f(-\vec{r}) \quad \text{oder} \quad f(\vec{r}) = -f(-\vec{r}) \quad \text{oder} \quad f(\vec{r}) = f(r,\vartheta) \quad \text{unabhängig von } \varphi$$

erfüllt?

(b) Drücken Sie die $Y_{\ell,m}$ bis zur Ordnung $\ell = 2$ in kartesischen Koordinaten aus. Bestimmen Sie durch geeignete Linearkombinationen der $Y_{\ell,m}$ einen vollständigen Satz *reellwertiger* Kugelflächenfunktionen $\mathcal{Y}_{\ell,m}$, und drücken Sie diese ebenfalls durch kartesische Koordinaten aus.

(c) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen $f(\vec{r})$ nach Kugelflächenfunktionen bis einschließlich zur Ordnung $\ell = 2$ in der Form $f(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} R_{\ell,m}(r)\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$:

$$f(\vec{r}) = 32r^2 - 3xyz\,, \quad f(\vec{r}) = \frac{r^2 - 4z + 3xy}{r^3}\mathrm{e}^{-\kappa r} \text{ mit } \kappa > 0\,.$$

Sind diese Reihenentwicklungen exakt?

[H11] *Spiegelladungen* **[$3 + 4 + 3 + 3 = 13$ Punkte]**

Wir betrachten zwei unendlich in y und z ausgedehnte, leitende und geerdete Platten bei $x = 0$ und $x = 1$. Zwischen den Platten befinde sich bei $x = d$ eine Ladung $q = 1$ auf der x-Achse. Es soll mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential iterativ bestimmt werden, wobei wir die Randbedingungen $\Phi(x = 0, y, z) = \Phi(x = 1, y, z) = 0$ haben. Es sei Φ_1 das Coulomb-Potential der Punktladung. *Hinweis*: Aufgrund der Rotationssymmetrie um die x-Achse genügt es im folgenden, allein die xy-Ebene zu betrachten. Diese Aufgabe ist vollständig mit MATHEMATICA zu lösen!

(a) Geben Sie eine erste Näherung Φ_2 an, indem Sie zwei Spiegelladungen hinzufügen. Wo sollten Sie diese plazieren? Zeigen Sie durch Plotten des Potentials auf den Platten, dass Φ_2 eine bessere Lösung als Φ_1 ist. Warum ist Φ_2 immer noch nicht die korrekte Lösung? *Hinweis*: Offensichtlich ist der Betrag von Φ, bzw. sein Maximum, ein gutes Maß für die Genauigkeit der Approximation.

(b) Wie können Sie Φ_2 durch das Hinzufügen weitere Spiegelladungen sukzessive verbessern? Führen Sie 40 weitere Iterationen durch und vergleichen Sie die Genauigkeit der Approximation, indem Sie das Maximum des Betrages der Φ_n auf einer der Platten in Abhängigkeit von n für $d = 1/2$ und $d = 1/3$ plotten. *Hinweise*: Verwenden Sie `FindMaxValue`. Es bietet sich an, mit einer Schleife zu arbeiten und die Φ_n in einem Stack von Funktionen zu speichern.

(c) Bestimmen Sie für das so genäherte Potential die Feldstärke und plotten Sie diese als Feldlinienplot in der xy-Ebene. *Hinweis*: Verwenden Sie `StreamPlot`. Erstellen Sie außerdem Plots für das Potential $\Phi_n(x, y = 0, z = 0)$ auf der x-Achse für $n = 1, 2$ und $n = 42$.

(d) Es sei nun d sehr klein, d.h., die Ladung befinde sich sehr nah an einer der Platten. Zeigen Sie, dass in diesem Fall bereits eine einzige Spiegelladung (wo?) eine brauchbare Näherung, und drei Spiegelladungen (wo?) eine sehr gute Näherung erzielen.

Bitte wenden!

.

[H12] *Kreisscheibe* **[$3+4=7$ Punkte]**

Betrachten Sie eine geladene Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Radius R und der Ladungsdichte

$$\varrho(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\pi R^2}\delta(z)\theta(R-\rho)\cos\varphi\,.$$

Zur Erinnerung: In Zylinderkoordinaten ist $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, und $\theta(u)=\begin{cases}1 & \text{wenn } u>0\\ 0 & \text{wenn } u<0\end{cases}$.

(a) Berechnen Sie die kartesischen Komponenten p_k, $k=1,2,3$, des Dipolmomentes $\vec{p}=\int \mathrm{d}^3r\,\varrho(\vec{r})\vec{r}$.

(b) Berechnen Sie nun die sphärischen Dipolmomente $q_{1,m}$, $m=-1,0,1$, mittels Kugelkoordinaten und finden damit die Beziehungen zwischen den kartesischen Komponenten p_k und den sphärischen Komponenten $q_{1,m}$. *Hinweis*: Es ist

$$q_{\ell,m}=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\int \mathrm{d}^3r\,\varrho(\vec{r})r^\ell Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$$

definiert. Die notwendigen $Y_{1,m}$ sind in [H10] angegeben.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!