Prof. Dr. Eric Jeckelmann
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe am 14.06.2013 vor der Übung

RELATIVISTISCHE KOVARIANZ DER ELEKTRODYNAMIK

Die Elektrodynamik im Vakuum ist eine relativistische Theorie, die bereits vor Formulierung der speziellen Relativitätstheorie durch Einstein existierte.

[H22] *Ebene Wellen* **[$3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte]**

Im Vakuum hängt das elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{x})$ einer allgemeinen ebenen, elektromagnetischen Welle folgendermaßen von den Argumenten ab:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(u) \quad \text{mit} \quad u = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t\,,$$

wobei $\vec{k}$ und ω Konstanten sind. Wir nehmen an, dass $\vec{E}(u)$ für ausreichend große u verschwindet.

(a) Welche Bedingung müssen der Vektor $\vec{E}$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen, damit die Vakuum-Maxwellgleichung $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ erfüllt ist?

(b) Welchen Wert hat das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(u)$, das ebenfalls für ausreichend große Argumente verschwindet und die Maxwellgleichungen $\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$ und $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ erfüllt?

(c) Welchen Wert muss die Kreisfrequenz ω haben, damit die Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$ im Vakuum gilt?

(d) Zeigen Sie, dass $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ paarweise orthogonal sind, und dass das elektrische und magnetische Feld überall und jederzeit (bis auf einen konstanten Faktor, der eine Potenz von c ist) gleich groß sind.

Hinweis: Wenn Sie wollen, dürfen Sie zur Vereinfachung $c = 1$ setzen.

[H23] *Lorenz-Eichung* **[$3 + 4 + 4 = 11$ Punkte]**

Wie wir noch lernen werden, kann man das skalare Potential $\phi(t, \vec{r})$ und das Vektorpotential $\vec{A}(t, \vec{r})$ immer so wählen, dass $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi = 0$ gilt.

(a) Führen Sie eine Lorentz-Transformation von $\vec{A}$ und ϕ durch, wenn $(t, \vec{r}) \mapsto (t', \vec{r}\,')$ den Übergang von einem Intertialsystem in ein anderes bezeichnet. Dies ist analog zu der Lorentz-Transformation von ρ und $\vec{j}$, die in der Vorlesung besprochen wurde.

(b) Zeigen Sie, dass die transformierten Potentiale $(\phi', \vec{A}\,')$ ebenfalls die Lorenz-Eichung erfüllen.

(c) Geben Sie explizit die Potentiale $(\phi', \vec{A}\,')$ einer mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegten punktförmigen Ladung an.

[H24] *Feld einer Punktladung* **[$3 + 3 + 3 = 9$ Punkte]**

In der Elektrostatik haben wir das elektrische Feld $\vec{E}$ einer (ruhenden) Punktladung bestimmt, ihr magnetisches Feld $\vec{B} = 0$. Diese Aufgabe ist vollständig mit MATHEMATICA zu lösen.

(a) Berechnen Sie mit MATHEMATICA aus den Lorentz-transformierten Potentialen aus [H23] die Felder $\vec{E}\,'$ und $\vec{B}\,'$ einer gleichförmig mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ in x-Richtung bewegten Punktladung.

(b) Visualisieren Sie diese Felder $\vec{E}\,'$ und $\vec{B}\,'$. *Hinweis*: aufgrund der Rotationssymmetrie um die x-Achse genügen zwei-dimensionale Plots, z.B. in der xy-Ebene.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Plots, dass die in (a) berechneten transformierten Felder mit der Notation $\vec{E}_\parallel = E_x\vec{e}_x$ und $\vec{E}_\perp = \vec{E} - \vec{E}_\parallel$ gegeben sind durch

$$\vec{E}_\parallel{}' = \vec{E}_\parallel\,, \qquad \vec{B}_\parallel{}' = \vec{B}_\parallel\,,$$

$$\vec{E}_\perp{}' = \gamma(\vec{E}_\perp - \vec{v} \times \vec{B})\,, \qquad \vec{B}_\perp{}' = \gamma(\vec{B}_\perp + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E})\,.$$

Hierbei ist $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname. Matrikelnummer und Ihre Gruppe an!