WIEDERHOLUNG

Zum Aufwärmen nach der vorlesungsfreien Zeit wiederholen wir den Umgang mit den Differentialoperatoren der Vektoranalysis sowie die Diracsche Delta-Distribution.

[H1] *Nabla-Operator* **[3 + 5 + 6 = 14 Punkte]**

In kartesischen Koordinaten x_i, $i = 1, 2, 3$, ist der *Nabla-Operaotor* definiert als

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{e}_i \partial_i \, .$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators werden drei in der Vektoranalysis grundlegende Differentialoperationen eingeführt, *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation*.

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\Phi &= \nabla\Phi = \vec{e}_i(\partial_i \Phi) \, , \\ \mathrm{div}\vec{A} &= \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \, , \\ \mathrm{rot}\vec{A} &= \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (\partial_j A_k) \, . \end{aligned}$$

Hierbei ist Φ ein skalares, und $\vec{A}$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie zur Übung die folgenden Ausdrücke:

(a) $\mathrm{grad}\, r$, $\mathrm{div}\, \vec{r}$ und $\mathrm{rot}\, \vec{r}$, wobei $r = |\vec{r}|$ ist.

(b) $\vec{E} = \mathrm{grad}\, \frac{1}{r}$ und dann, für $\vec{r} \neq 0$, $\mathrm{div}\, \vec{E}$ und $\mathrm{rot}\, \vec{E}$.

(c) $\mathrm{grad}\, \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$ und $\mathrm{rot}\, \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}$, wobei $\vec{a}$ ein fest gewählter, konstanter Vektor ist.

[H2] *Eigenschaften der δ-Distribution* **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Die definierende Eigenschaft der Diracschen Delta-Distribution ist die Gleichung

$$\int \mathrm{d}x \, \delta(x) f(x) = f(0)$$

für jede ausreichend rasch für $|x| \to \infty$ abfallende Funktion $f(x)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Diracschen Delta-Distribution.

(a) $\displaystyle\int \mathrm{d}x \, \delta(\alpha x) f(x) = \frac{1}{|\alpha|} f(0)$,

(b) $\displaystyle\int \mathrm{d}x \, \delta'(x) f(x) = -f'(0)$.

[H3] *Die δ-Distribution als Grenzfall* **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Die Diracsche Delta-Distribution kann als Grenzwert einer Folge von Funktionen dargestellt werden.

(a) Zeigen Sie durch Anwenden auf eine Testfunktion $f(x)$, dass gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sin^2(tx)}{tx^2} = \pi \delta(x) \, .$$

Hinweis: $\int \mathrm{d}x \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$.

(b) Zeigen Sie durch Anwenden auf eine Testfunktion $f(x)$, dass gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} \mathrm{e}^{-|x|/t} = \delta(x) \, .$$

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!