---

INTEGRALSÄTZE

Mit Hilfe der Integralsätze lassen sich Integrale über berandete Gebiete durch Integrale ausdrücken, die lediglich über den Rand des Gebietes ausgeführt werden, und umgekehrt. Dies ist oft nicht nur sehr nützlich, sondern hat physikalische Konsequenzen von zentraler Bedeutung.

**[H7]** *Vektorfeld aus dem Gaußschen Satz* **[$5 + 5 = 10$ Punkte]**

Das elektrische Feld wird (unter anderem) durch Ladungen erzeugt. Kennt man die Ladungsverteilung, so lässt sich daraus das elektrische Feld und sein Potential rekonstruieren.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für die axialsymmetrische, entlang der $z$-Achse translationsinvariante Ladungsverteilung

$$\varrho(r_\perp) = \begin{cases} \varrho_0 \dfrac{{r_\perp}^2}{R^2} & \text{falls } 0 \le r_\perp \le R \\ 0 & \text{falls } r_\perp > R \end{cases} .$$

Hierbei sind $\varrho_0$ und $R > 0$ Konstanten, und $r_\perp$ die Radialkoordinate der Zylinderkoordinaten $r_\perp, \varphi, z$. Überprüfen Sie zur Kontrolle, ob das Feld für $r_\perp = 0$ und $r_\perp \to \infty$ verschwindet.

(b) Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$, definiert durch $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, aus dem Feld. Setzen Sie hierfür $\phi(0) = 0$.

**[H8]** *Elektrostatik* **[$6 + 4 = 10$ Punkte]**

Betrachten Sie die dreidimensionale Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{r}) = \varrho(z) = \varrho_0\, z\, \mathrm{e}^{-\lambda|z|} ,$$

die offensichtlich nur von der $z$-Koordinate des Ortsvektors $\vec{r}$ abhängt. Hierbei sind $\varrho_0$ und $\lambda > 0$ Konstanten.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld im Bereich $-\infty < z < \infty$ mit Hilfe der differentiellen Maxwellgleichung der Elektrostatik.

(b) Skizzieren Sie Ladungsdichte und Feld als Funktionen von $z$. Skizzieren Sie auch den qualitativen Verlauf des elektrostatischen Potentials (ohne Rechnung).

**[H9]** *Gaußscher Mittelwertsatz* **[10 Punkte]**

Zeigen Sie: In einem ladungsfreien Raumbereich ist der Mittelwert des Potentials über eine Kugeloberfläche gleich dem Potential im Kugelmittelpunkt.

*Hinweis*: Starten Sie zum Beispiel mit dem Potential $\phi(0)$ im Mittelpunkt. Verwenden Sie die Formel

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) ,$$

partielle Integrationen bezüglich des Nabla-Operators sowie den Gaußschen Satz.

**HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!**
**Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!**