Hausübung V zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2014

Prof. Dr. Manfred Lein

Abgabe 20.05.2014 vor der Vorlesung — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

---

RANDWERTPROBLEME

Das Lösen von Randwertproblemen gehört zu den wesentlichen Grundfertigkeiten, die in Feldtheorien wie der Elektrodynamik eine zentrale Rolle spielen. Die allgemeine Lösung eines Randwertproblems lässt sich zum Beispiel mit Hilfe der Greenschen Funktion konstruieren.

[H13] *Faradayscher Käfig* **[7 Punkte]**

Bekanntlich schützt ein Faradayscher Käfig vor elektromagnetischen Feldern, so auch vor einem Blitzeinschlag. Warum aber eigentlich? Für den Fall statischer elektrischer Felder können wir dies bereits verstehen.

Betrachten Sie einen ladungsfreien Hohlraum, der von einer leitenden Oberfläche umschlossen ist. Zeigen Sie, dass das Feld im Innern identisch verschwindet. *Hinweis*: Überlegen Sie, welches Randwertproblem einen Faradayschen Käfig beschreibt.

[H14] *Elektrostatik in zwei Dimensionen* **[$4+4+3+2=13$ Punkte]**

Wir wollen zeigen, dass $G(r_\perp) = \frac{1}{2\pi}\ln(r_\perp)$ die Greensche Funktion für den Laplace-Operator in zwei Dimensionen ist, dass also $\Delta G(r_\perp) = \delta(x)\delta(y)$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass $\Delta G(r_\perp) = 0$ für alle $r_\perp \neq 0$ gilt.

(b) Wir benötigen den Gaußschen Satz in zwei Dimensionen. Zeigen Sie diesen für ein zwei-dimensionales Vektorfeld (v_x, v_y), indem Sie es um eine dritte ergänzen, $(v_x, v_y, 0)$, und dafür den Gaußschen Satz in drei Dimensionen verwenden. Das Volumen ergibt sich aus der Fläche in der xy-Ebene durch Translation in z-Richtung. *Hinweis*: Beachten Sie, dass der z-Beitrag der Divergenz wegfällt, und das Oberflächenintegral keine Beiträge von Boden- und Deckelfläche erhält.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des zwei-dimensionalen Gaußschen Satzes, dass für jede Fläche A in der xy-Ebene, die den Ursprung enthält, das Flächenintegral $\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\Delta G(r_\perp) = 1$ ist.

(d) Folgern Sie schließlich daraus, dass $\Delta G(r_\perp) = \delta(x)\delta(y)$ sein muss.

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!

Bitte wenden!

SPIELREGELN

- Computerübungen können allein oder zu zweit bearbeitet werden.
- Ihre Lösung muss vollständig mit MATHEMATICA erstellt, vernünftig kommentiert und ausreichend dokumentiert sein.
- Sie haben für die Bearbeitung zweieinhalb Wochen Zeit (siehe Datum oben).
- Computerübungen werden in Ihren Präsenzübungen zum angegebenen Zeitpunkt Ihrem Tutor vorgeführt. Wenn Sie zu zweit gearbeitet haben, müssen Sie auch beide anwesend sein.
- Schicken Sie Ihrem Tutor vorab Ihr MATHEMATICA-Notebook per Email, spätestens bis zum Tag vor der Präsenzübung.
- Da die Vorführung in Ihren Präsenzübungen stattfindet, können Terminschwierigkeiten nur bei triftigen Gründen anerkannt werden.
- Bitte bringen Sie zur Vorführung ein Notebook mit, auf dem MATHEMATICA installiert und Ihre Lösung lauffähig gespeichert ist. Sollte Ihnen dies nicht möglich sein, so bringen Sie Ihre Lösung auf einem USB-Stick mit.
- Es versteht sich von selbst, dass Sie bei der Vorführung wissen und entsprechend erläutern können sollten, was Ihr Programm tut.
- Ab sofort gibt es eine Sprechstunde für Probleme mit den Computerübungen, Donnerstags 10-12 im Raum 034 im Gebäude 3701 (ITP).

[C1] *Geladener Stab II* **[$3+3+3+3=12$ Punkte]**

Betrachten Sie noch einmal die Situation aus [P9], den homogen geladenen Stab endlicher Länge 2ℓ, der sich auf der z-Achse zwischen $z=-\ell$ und $z=+\ell$ befindet.

(a) Versuchen Sie, die exakte Lösung für die Potentialdifferenz $\Phi(\vec{r})-\Phi(\vec{r}_0)$ mit Hilfe von MATHEMATICA zu erhalten. Damit MATHEMATICA die Integration über z in geschlossener Form ausführen kann, müssen Sie geeignete Annahmen machen und MATHEMATICA mitteilen.

(b) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ an.

(c) Erstellen Sie Plots des Potentials und des elektrischen Feldes, und zwar einmal in der xz-Ebene, und einmal in der xy-Ebene zu einer per `Manipulate` einstellbaren Höhe z.

(d) Geben Sie Potential und elektrisches Feld für einen Punkt $\vec{r}=(0,0,z>\ell)$ an. Was ergibt sich für $z \gg \ell$?

[C2] *Spiegelladungen III* **[$4+6+4+4=18$ Punkte]**

Wir betrachten zwei unendlich in y und z ausgedehnte, leitende und geerdete Platten bei $x=0$ und $x=1$. Zwischen den Platten befinde sich bei $x=d$ eine Ladung $q=1$ auf der x-Achse. Es soll mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential iterativ bestimmt werden, wobei wir die Randbedingungen $\Phi(x=0,y,z)=\Phi(x=1,y,z)=0$ haben. Es sei Φ_1 das Coulomb-Potential der Punktladung. *Hinweis*: Aufgrund der Rotationssymmetrie um die x-Achse genügt es im folgenden, allein die xy-Ebene zu betrachten. Diese Aufgabe ist vollständig mit MATHEMATICA zu lösen!

(a) Geben Sie eine erste Näherung Φ_2 an, indem Sie zwei Spiegelladungen hinzufügen. Wo sollten Sie diese plazieren? Zeigen Sie durch Plotten des Potentials auf den Platten, dass Φ_2 eine bessere Lösung als Φ_1 ist. Warum ist Φ_2 immer noch nicht die korrekte Lösung? *Hinweis*: Offensichtlich ist der Betrag von Φ, bzw. sein Maximum, ein gutes Maß für die Genauigkeit der Approximation.

(b) Wie können Sie Φ_2 durch das Hinzufügen weiterer Spiegelladungen sukzessive verbessern? Führen Sie 40 weitere Iterationen durch und vergleichen Sie die Genauigkeit der Approximation, indem Sie das Maximum des Betrages der Φ_n auf einer der Platten in Abhängigkeit von n für $d=1/2$ und $d=1/3$ plotten. *Hinweise*: Verwenden Sie `FindMaxValue`. Es bietet sich an, mit einer Schleife zu arbeiten und die Φ_n in einem Array von Funktionen zu speichern.

(c) Bestimmen Sie für das so genäherte Potential die Feldstärke und plotten Sie diese als Feldlinienplot in der xy-Ebene. *Hinweis*: Verwenden Sie `StreamPlot`. Erstellen Sie außerdem Plots für das Potential $\Phi_n(x,y=0,z=0)$ auf der x-Achse für $n=1,2$ und $n=42$.

(d) Es sei nun d sehr klein, d.h., die Ladung befinde sich sehr nah an einer der Platten. Zeigen Sie, dass in diesem Fall bereits eine einzige Spiegelladung (wo?) eine brauchbare Näherung, und drei Spiegelladungen (wo?) eine sehr gute Näherung erzielen.

HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!