

ELEKTROSTATIK, INSBESONDERE DIPOL

Wir betrachten einige einfache Situationen in der Elektrostatik, in der die bisher kennen gelernten Techniken eingesetzt werden können, insbesondere den elektrischen Dipol.

[H18] Orthogonale Funktionensysteme **[4 + 4 + 2 = 10 Punkte]**

Betrachten Sie zwei orthonormale Funktionensysteme, einmal die uns schon aus [P12] bekannten Funktionen $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ und einmal $v_\ell(x) = \alpha e^{2\pi i \ell x/a}$, die beide auf dem Intervall $[0, a]$ definiert sind. Hierbei sind $n = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$, und $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \in \mathbb{Z}$.

- Wählen Sie α so, dass die $\{v_\ell\}$ normiert sind. Zeigen Sie, dass die $\{v_\ell\}$ auch orthogonal sind.
- Entwickeln sie die Funktion $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ als Superposition von den u_n beziehungsweise von den v_ℓ , indem Sie jeweils die Entwicklungskoeffizienten berechnen.
- Wie unterscheiden sich die Funktionswerte der beiden Entwicklungen, wenn Sie diese auf Argumente x außerhalb von $[0, a]$ fortsetzen?

[H19] Dipolmoment **[10 Punkte]**

Berechnen Sie das Dipolmoment einer Kugel mit Radius R bestehend aus zwei entgegengesetzt homogen geladenen Hälften. Die gesamte Ladung auf jeder Hälfte ist Q bzw. $-Q$. *Bemerkung:* Dieses System ist ähnlich zu [P14](a), aber mit einer Vollkugel.

[H20] Elektrostatische Energie **[6 + 2 + 2 = 10 Punkte]**

Die gesamte elektrostatistische Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung kann entweder aus deren elektrischer Feldstärke oder aus deren Ladungsdichte und Potential berechnet werden (siehe Vorlesung).

- Zeigen Sie durch explizite Berechnung für den Fall einer homogen geladenen Kugelschale mit Ladung Q und Radius R , dass die beiden Ausdrücke die gleiche Energie liefern.
- Welchen Radius hat eine homogen geladene Kugelschale mit der Ladung $-e$ des Elektrons, so dass die elektrostatistische Energie gerade der Masse m_e des Elektrons entspricht? Gemeint ist, dass Sie die elektrostatistische Energie der Ladung in ihrem *eigenem* Potential bestimmen, die so genannte *Selbstenergie*. Dies führt auf den so genannten *klassischen Elektronenradius*. Geben Sie diesen sowohl als Formel in den Konstanten e , m_e , ε_0 und c an, als auch als numerischen Wert in der Einheit Meter.
- Überlegen Sie qualitativ, ob die elektrostatistische Energie einer Vollkugel mit homogener Ladungsverteilung größer oder kleiner ist, als die einer Kugelschale mit gleichem Radius und gleicher Gesamtladung.