VEKTORANALYSIS

Wir machen uns mit einigen grundlegenden Rechentechniken vertraut, die in der Vektoranalysis eine wichtige Rolle spielen.

[P1] *Krummlinige Koordinaten*
Betrachten Sie Zylinderkoordinaten ρ, φ, z mit $(x, y, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$ mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\tan\varphi = y/x$.

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $J = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)}$ für den Wechsel von kartesischen auf Zylinderkoordinaten. Geben Sie die Basisvektoren $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_z$ an.
(b) Berechnen Sie das vektorielle Flächenelement für die Oberfläche eines Zylinders vom Radius R und Höhe $2h$. Schreiben Sie es in der Form $\mathrm{d}\vec{f} = \vec{n}\,\mathrm{d}f$ mit dem Flächennormalenvektor $\vec{n}$. Beachten Sie, dass Sie dies separat für die Mantelfläche, Boden und Deckel tun müssen.
(c) Geben Sie die drei-dimensionale δ-Distribution $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ in kartesischen und in Zylinderkoordinaten an.

[P2] *Ladungs-Distributionen*
Schreiben Sie mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion die Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ für die folgenden Ladungsverteilungen:

(a) Eine Punktladung Q am Ort $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ.
(b) Eine homogen geladene Kugeloberfläche mit Ladung Q und Radius R.
(c) Eine homogen geladene Kreisscheibe mit Ladung Q, Radius R und verschwindender Dicke.

Beachten Sie, dass das Volumenelement in Kugelkoordinaten $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ lautet. In allen Fällen muss $Q = \int \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$ gelten.

[P3] *Quellen und Wirbel*
Vektorfelder, die ausreichend schnell im Unendlichen verschwinden und überall im Raum definiert sind, lassen sich in Quellen- und Wirbel-Anteile zerlegen. Das ist oft nützlich, um grundlegende Eigenschaften von Vektorfeldern zu erschließen. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{J}{2\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R^2}\hat{e}_\varphi & \text{falls } \sqrt{x^2+y^2} < R \\ \frac{J}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{e}_\varphi & \text{falls } \sqrt{x^2+y^2} \geq R \end{cases},$$

wobei der Strom J und die Länge R reelle Konstanten bezeichnen. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{B}$. *Hinweis*: $\hat{e}_\varphi = (-y, x, 0)/\sqrt{x^2 + y^2}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.