DIPOL & KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

Neben einer weiteren Übung zum elektrischen Dipol widmen wir uns den Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$, die für die Behandlung von Problemen mit Rotationssymmetrie wichtig sind.

[P16] *Induziertes Dipolmoment*

Betrachten Sie eine leitende, geerdete Kugel mit Radius R, die einem homogenen äußeren elektrischen Feld $\vec{E}_0$ ausgesetzt ist, d.h., in großer Entfernung von der Kugel gilt $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$. Die Kugel liege konzentrisch zum Ursprung.

(a) Verwenden Sie die Entwicklung des Potentials nach Legendre-Polynomen, also

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \big(a_\ell\, r^\ell + b_\ell\, r^{-\ell-1}\big) P_\ell(\cos\vartheta)\,,$$

um das Potential außerhalb der Kugel zu bestimmen.

(b) Wie groß ist das induzierte Dipolmoment der Kugel?

[P17] *Entwicklung in Kugelflächenfunktionen*

In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktion $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ und ihre wesentlichen Eigenschaften erwähnt. Die ersten paar lauten

$$\begin{aligned}
&Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,,\\
&Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\,, \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\,,\\
&Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\Big)\,, \quad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\,, \quad Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\varphi}\,.
\end{aligned}$$

(a) Was können Sie über die Entwicklung einer Funktion $f(\vec{r})$ in Kugelflächenfunktionen sagen, wenn $f(\vec{r})$ jeweils eine der Relationen

$$\begin{aligned}
f(\vec{r}) &= f(-\vec{r}) && \text{oder}\\
f(\vec{r}) &= -f(-\vec{r}) && \text{oder}\\
f(\vec{r}) &= f(r,\vartheta) && \text{unabhängig von } \varphi
\end{aligned}$$

erfüllt?

(b) Drücken Sie die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ bis zur Ordnung $\ell = 1$* in kartesischen Koordinaten aus. Bestimmen Sie durch geeignete Linearkombinationen der $Y_{\ell,m}$ einen vollständigen Satz *reellwertiger* Kugelflächenfunktionen $\mathcal{Y}_{\ell,m}$, und drücken Sie diese ebenfalls durch kartesische Koordinaten aus.

(c) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen $f(\vec{r})$ nach Kugelflächenfunktionen bis einschließlich zur Ordnung $\ell = 1$* in der Form $f(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} f_{\ell,m}(r) Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$. Sind diese Reihenentwicklungen exakt?

$$\begin{aligned}
f(\vec{r}) &= 32\,r^2 - 3\,x\,y\,z\,,\\
f(\vec{r}) &= \frac{r^2 - 4\,z + 3\,x\,y}{r^3}\,\mathrm{e}^{-\kappa\,r} \quad \text{mit } \kappa > 0\,.
\end{aligned}$$

*Wenn noch Zeit ist, führen Sie dies bis zur Ordnung $\ell = 2$ durch.