
LORENTZ-KURVEN & GAUSS-GLOCKEN, KUGELWELLEN

Wir studieren drei universelle und fundamentale Gesetzmäßigkeiten der Physik, nämlich die Phänomene Diffusion, Resonanz und Kugelwellen.

[H28] *Diffusions/Wärmeleit-Gleichung* **[$2+4+4+2=12$ Punkte]**

Neben der Wellengleichung $c^2\Delta\phi = (\partial_t)^2\phi$ gibt es eine weitere sehr wichtige partielle Differentialgleichung, die Diffusions- oder Wärmeleit-Gleichung $D\Delta\psi = \partial_t\psi$. Diese wird hier untersucht.

(a) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung für eine Dichte ρ und einen Strom $\vec{j} = -D\,\mathrm{grad}\rho$, der trägheitslos Dichteunterschiede ausgleicht, zur Diffusionsgleichung

$$\partial_t\rho = D\Delta\rho$$

führt. Hierbei bezeichnet D die Diffusionskonstante.

(b) Zeigen Sie, dass für $t > 0$

$$\Pi(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}^3}\exp\Big(-\frac{\vec{x}^2}{4Dt}\Big)$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung ist. Überzeugen Sie sich, dass sie in Form eines Produktes $f(x,a)f(y,a)f(z,a)$ aus Funktionen $f(x,a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\exp(-x^2/a)$ geschrieben werden kann, wobei $a = 4Dt$ ist.

(c) Zeigen Sie durch Anwenden auf Testfunktionen, dass

$$\lim_{a\to 0} f(x,a) = \delta(x)$$

ist. Wogegen strebt demnach $\Pi(t,\vec{x}-\vec{y})$ für $t\to 0$?

(d) Zeigen Sie damit, dass

$$\rho(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}^3}\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4Dt}}\,\rho(0,\vec{y})$$

diejenige Lösung $\rho(t,\vec{x})$ der Diffusionsgleichung ist, die zur Anfangszeit $t = 0$ den Wert $\rho(0,\vec{x})$ hatte.

[H29] *Kugelwellen* **[$2+4=6$ Punkte]**

Wir betrachten Kugelwellen, also mit $r = |\vec{r}|$ Wellen der Form

$$E^k(t,\vec{r}) = \frac{\mathcal{E}^k(r-ct)}{r}\,, \quad k = 1,2,3\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass solche Kugelwellen Lösungen der Wellengleichung sind, d.h., dass gilt:

$$\Box E^k(t,\vec{r}) = \Big(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)E^k(t,\vec{r}) = 0\,.$$

(b) Das elektrische Feld einer kugelartigen Welle im Vakuum sei durch

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = E_0\frac{\sin\vartheta}{r}\Big(\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\Big)\vec{e}_\varphi \quad \text{mit } \omega = c\,k$$

gegeben. Skizzieren Sie $\vec{E}$ auf einer Kugeloberfläche. Bestimmen Sie $\vec{B}(t,\vec{r})$ aus den Maxwellschen Gleichungen. Überprüfen Sie, dass die Wellengleichung $\Box\vec{E}(t,\vec{r}) = 0$ erfüllt ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Laplace-Operator, sowie ggfls. Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten (siehe [H16]). Diese dürfen Sie nachschlagen.

Bitte wenden!

[H30] *Resonanz* **[2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12 Punkte]**

Eine Resonanz ist ein Zustand, dessen Energie E um einen mittleren Wert E_0 mit einer Halbwertsbreite Γ so schwankt, dass eine Energiemessung den Wert E im Intervall $\mathrm{d}E$ mit Wahrscheinlichkeit $w(E)\mathrm{d}E$ ergibt, wobei

$$w(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

eine Lorentzkurve ist.

(a) Wo wird $w(E)$ maximal, welchen Wert hat w dort, wo ist $w(E)$ auf den halben Maximalwert abgefallen?

(b) Zeigen Sie, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit, irgend einen Energiewert zu messen, in der Tat eins beträgt. *Hinweis*: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Durch Verschieben und Skalieren kann eine Lorentzkurve auf die Standardform $\frac{1}{x^2+1}$ gebracht werden. Vergleichen Sie diese Standardform mit einer Gaußverteilung gleicher Halbwertsbreite und gleicher Höhe, $\exp(-x^2 \ln 2)$, oder gleicher Fläche, $\sqrt{\pi \ln 2}\, \exp(-x^2 \ln 2)$, indem Sie einen Plot mit diesen drei Funktionen anfertigen.

Das Betragsquadrat $|a(t)|^2$ der Fouriertransformierten von w,

$$a(t) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{w}(t/\hbar) = \int \mathrm{d}E\, w(E)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar}\,,$$

ist, wie die Quantenmechanik besagt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Zeit t die Resonanz noch besteht und noch nicht zerfallen ist.

(d) Zeigen Sie $a(t)^* = a(-t)$.

(e) Berechnen Sie $a(t)$ für positive Zeiten mit Hilfe des Residuensatzes. (Freiwillige Zusatzaufgabe: Überzeugen Sie sich, dass die in der Vorlesung behandelten Voraussetzungen für rationale Funktionen $w(E)$ gegeben sind.) Zeigen Sie so

$$a(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} E_0 t}\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}$$

mit $\tau = \hbar/\Gamma$, dass also die Wahrscheinlichkeit, die Resonanz noch zur Zeit t vorzufinden, exponentiell abnimmt und dass die Lebensdauer τ invers zur Breite Γ der Resonanz ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!