FLÜSSE, STRÖME, KONTINUITÄTSGLEICHUNGEN

In Feldtheorien nehmen Erhaltungssätze die Form von Kontinuitätsgleichungen an. Wir üben, wie diese genutzt werden können, um Informationen über das betrachtete System zu finden.

[H11] *Stromdichte* **[9 Punkte]**

Aus dem Mittelpunkt eines Zylinders mit Radius R und Höhe h strömt die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{J}{4\pi}\,\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\,.$$

Zeichnen und parametrisieren Sie die Mantelfläche F des Zylinders. Geben Sie zur Berechnung des Stroms durch die Mantelfläche

$$J_{\text{Mantel}} = \int_F \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{j} = \int \mathrm{d}^2\lambda (t_1\times t_2)\cdot\vec{j}\,, \quad (t_a)^i = \frac{\partial x^i}{\partial\lambda^a}\,,$$

den Integranden an. *Hinweis*: Berechnen Sie die Ableitung von $x/\sqrt{1+x^2}$, das könnte Ihnen bei der Auswertung des Integrals nützen ;)
Wie groß ist J_{Mantel} als Funktion von

$$\sin\chi = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}}\;?$$

[H12] *Ebene Wellen* **[$3+3+3+3=12$ Punkte]**

Wir betrachten die ebene Welle im Vakuum aus Aufgabe [P8], deren elektrische Komponente die Form $\vec{E}(x)=\vec{e}(u(x))$ mit $u(x)=k\cdot x=\omega\,t-\vec{k}\cdot\vec{x}$ hat.

(a) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{B}$ und die Energiedichte $w=\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)$ einer solchen ebenen Welle.
(b) Überprüfen Sie die Kontinuitätsgleichung für den Energiefluss, $\partial_t w+\mathrm{div}\vec{S}=-\vec{E}\cdot\vec{j}$.
(c) Berechnen Sie den Maxwellschen Spannungstensor $T^{ik}=-(E^iE^k+B^iB^k-\frac{1}{2}\delta_{ik}(\vec{E}^2+\vec{B}^2))$. Nutzen Sie Maxwell-Gleichungen $\partial_k E^k=\rho$ und $\partial_k B^k=0$, um die Kontinuitätsgleichung $\partial_t S^i+\partial_k T^{ik}=-(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})^i$ für die ebenen Wellen zu überprüfen.
(d) Wie groß ist der durch diese ebene Welle erzeugte Strahlungsdruck auf eine absorbierende Fläche mit Normalenvektor $\vec{n}$, $T^{ik}n^k$?

[H13] *Kontinuitätsgleichung* **[9 Punkte]**

Um eine Schallquelle bildet sich eine Stromdichte $\vec{j}$, die in größerer Entfernung durch

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = A\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,\cos(kr-\omega t)\,, \quad r=|\vec{r}|\,,$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die zugehörige Dichte $\rho(t,\vec{r})$, die die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}+\mathrm{div}\vec{j}=0$ erfüllt, und die ohne Schallquelle ($A=0$) konstant wäre.

Bitte wenden!

SPIELREGELN ZUR COMPUTERÜBUNG

Die Bearbeitung der Computerübungen erfolgt, wie bei den Hausübungen, allein. Der Lösungsweg soll vollständig mit *Mathematica* ausgeführt und in einem "Notebook" dokumentiert werden. Ein Ausdruck davon ist abzugeben. Zusätzlich müssen Sie Ihre Lösung vorführen und erläutern. Dafür bieten wir pro Computerübung zwei Termine an. Diese werden im Stud.IP noch bekannt gegeben.

Die Computerübungen sind Teil der Studienleistung. Sie müssen *alle* sinnvoll bearbeitet werden. Die Punkte dienen nur als grobe Richtschnur. Bei der Vorführung wird Ihnen mitgeteilt, ob Ihre Lösung ausreichend bearbeitet worden ist. Bitte beachten Sie: Eine ausreichende Dokumentation und Kommentierung Ihres Notebooks ist wesentlicher Bestandteil der Lösung. Es wird diesmal keine Möglichkeit zur Nachbesserung geben!

Bringen Sie zum Termin für die Vorführung bitte Ihr eigenes Notebook mit. Sollte dies nicht möglich sein, müssen Sie Ihre Lösung zuvor per Email (`flohr@itp.uni-hannover.de`) rechtzeitig an Michael Flohr schicken. Aus Sicherheitsgründen können wir keine fremden USB-Sticks mehr einlesen.

Die Sprechstunde für die Computerübungen findet nur noch nach vorheriger Vereinbarung statt. Sie ist im vergangenen Semester ohnehin praktisch nie genutzt worden.

[C1] *Relativistische Bewegung im elektromagnetischen Feld* **$[5 + 5 + 5 + 5^* = 15 + 5^*$ Punkte]**
Wir kommen auf Aufgabe [H7] zurück. Dort wurden die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen der invarianten Masse m und der Ladung q hergeleitet, das sich in zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Feldern bewegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2}} = q\left(\vec{E}(\vec{x}) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{x})\right) ,$$

wobei wieder $c = 1$ gesetzt ist.

(a) Es sei zunächst $\vec{B} \equiv 0$ und $\vec{E} = E_0\vec{e}_x$ konstant. Implementieren Sie in MATHEMATICA eine Routine, die die Bewegungsgleichungen in diesem Fall für gegebene Anfangsbedingungen nach $\vec{v}(t)$ löst. Kontrollieren Sie Ihre Routine, in dem Sie für die Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = 0$ und $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_y$ zeigen, dass $v_z(t) \equiv 0$ ist, und $v_x \to 1$, $v_y \to 0$ für große Zeiten $t \to \infty$ gilt.

(b) Integrieren Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu $\vec{x}(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Bahnkurve $x(y)$ und vergleichen Sie diese dann mit der Wurfparabel

$$x(y) = \frac{q\,E_0}{2\gamma_0\,m\,v_0^2}y^2 \quad \text{mit} \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} .$$

(d*) Erweiteren Sie Ihre Routinen so, dass Sie den Fall gekreuzter homogener elektrischer und magnetischer Felder lösen können. Spätestens hier werden Sie numerische Verfahren einsetzen müssen.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!