Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe 02.06.2015 vor der Vorlesung

POTENTIALTHEORIE

Kann man aus Ladungs- und Stromverteilungen die Potentiale ermitteln, so lassen sich auch die Feldkonfigurationen leicht bestimmen. Daher ist die Potentialtheorie wichtig.

[H17] *Spiegelladungsmethode* **$[4+4+2+2=12$ Punkte]**

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Kugel mit Radius r befinde sich im Abstand $a > r$ eine Ladung q. Zeigen Sie, dass der Potentialwert $\phi(\vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| = r$ sich auch ergibt, wenn man statt der Kugel an geeigneter Stelle im Abstand $b < r$ eine zweite Ladung q', die Spiegelladung, anbringt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeichnen Sie dazu die Orte beider Ladungen und die Äquipotentiallinie $|\vec{x}| = r$, und begründen Sie die Gleichung

$$0 = \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\varphi}} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi}} \quad \forall\,\varphi\,.$$

(b) Beide Terme sind von der Form $\pm 1/\sqrt{A + B\cos\varphi}$, und können sich nur bei passenden Koeffizienten A und B für alle φ wegheben. Zeigen Sie, dass $q' = -q\sqrt{b/a}$ und $b = r^2/a$ gelten muss, und dass demnach

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{\frac{r}{|\vec{x}_0|}}{|\vec{x} - \frac{r^2}{\vec{x}_0^{\,2}}\vec{x}_0|}\right)$$

das Potential einer Punktladung q ist, die sich am Ort $\vec{x}_0$ außerhalb einer leitenden, geerdeten Kugel mit Radius r befindet.

(c) Zeigen Sie, dass der Ort der zweiten Ladung gerade durch die Inversion des Ortes der Punktladung an der Kugeloberfläche mit Radius r gegeben ist.

(d) Welche Kraft übt die Kugel auf die Punktladung aus?

[H18] *Zum Vektorpotential* **$[2+2+2+2+2=10$ Punkte]**

In der Vorlesung wurden mit Hilfe der Poisson-Gleichung hilfreiche Darstellungen für das Potential und das elektrische Feld von Ladungsverteilungen gefunden. Hier versuchen wir dies analog für das Vektorpotential und die magnetische Flussdichte.

(a) Warum ist das Vektorpotential $\vec{A}$ in Lorenzeichung bei zeitunabhängigen Strömen und Feldern gegeben als

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3y\,\frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}\;?$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ erfüllt ist: Begründen Sie dazu, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ ist, und wälzen Sie durch partielle Integration die Ableitung von $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ auf $\vec{j}(\vec{y})$ ab. Welche Eigenschaft muss $\vec{j}(\vec{y})$ haben, damit hier keine Randterme auftreten?

(c) Zeigen Sie in Indexnotation $\mathrm{rot}(f\vec{C}) = (\mathrm{grad}f) \times \vec{C} + f(\mathrm{rot}\vec{C})$.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung von (c), dass

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3y\,\vec{j}(\vec{y}) \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}\,.$$

(e) Werten Sie diesen Ausdruck für eine fadenförmige Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}) = J\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$ aus. Mit $\int \mathrm{d}u(1+u^2)^{-3/2} = 2$ sollte sich $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi R}J\vec{e}_\varphi$, $R^2 = x^2 + y^2$, ergeben.

[H19] *Greenfunktion* **[8 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Greenfunktion

$$G(t,t') = \frac{1}{\omega}\theta(t-t')\sin(\omega(t-t'))$$

die Differentialgleichung

$$\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\Big)G(t,t') = \delta(t-t')$$

erfüllt, und dass demnach

$$x_{\mathrm{ret}}(t) = \int \mathrm{d}t' G(t,t') f(t')$$

die inhomogene Schwingungsgleichung

$$\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\Big)x(t) = f(t)$$

löst. Vereinfachen Sie das Integral $x_{\mathrm{ret}}(t)$ mit Hilfe der Definition der Stufenfunktion $\theta(t)$ und überprüfen Sie die inhomogene Schwingungsgleichung.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!