Klausur zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2015

Prof. Dr. Norbert Dragon

06.08.2015, 9:00-11:30 Uhr — PD Dr. Michael Flohr

Name:		#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Σ
Matrikelnr.:		Pkte								

[K0] *Kurzfragen* **[$1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Wie lautet die allgemeinste Lösung der Wellengleichung in zwei Dimensionen, $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t,x) = 0$?

(b) Unter welcher Bedingung ist das Dipolmoment einer Ladungsverteilung unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs?

(c) Wie ist die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes gegeben?

(d) Was ist eine Eichtransformation?

(e) Welchen Erhaltungssatz beschreibt die Kontinuitätsgleichung?

(f) Wie ist der Maxwellsche Feldstärketensor F_{mn} durch das Viererpotential A_m gegeben?

[K1] *Quadrupoltensor* **[$3+3=6$ Punkte]**

Ein Quadrupoltensor habe die Form $Q = q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie

(a) Eigenwerte und

(b) Eigenvektoren.

[K2] *Integralsätze* **[$2+3+1=6$ Punkte]**

Betrachten Sie folgende kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho_0\, \mathrm{e}^{-\alpha r^3}$ mit ρ_0 und α relle Konstanten, $\alpha > 0$.

(a) Bestimmen Sie ρ_0 so, dass sich die Gesamtladung Q ergibt.

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes und skizzieren Sie die Funktion $|\vec{E}(r)|$.

(c) Geben Sie das Dipolmoment der Laudngsverteilung an.

[K3] *Fouriertransformation* **[$1+1+2=4$ Punkte]**

Berechnen Sie die Fouriertransformation $\tilde{g}(\vec{k}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \displaystyle\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\, g(\vec{x})$ der Funktion

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\,.$$

(a) Wählen Sie die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$ und drücken Sie das Skalarprodukt im Exponenten in Kugelkoordinaten aus. Die Integration über φ ist nun ganz einfach.

(b) Die Integration über $\cos\theta$ lässt sich nun elementar ausführen.

(c) Führen Sie die abschließende Integration über r aus.

[K4] *Residuensatz* **[$2+2=4$ Punkte]**

Betrachten Sie das Integral $\displaystyle\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, \frac{-2\mathrm{i}}{z^2+6z+1}$, wobei Γ der im Gegenzeigersinn durchlaufene Einheitskreis sei, parametrisiert als $\theta \mapsto z(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) Berechnen Sie dieses Integral mit dem Residuensatz. Geben Sie dazu an, wo die Pole des Integranden liegen und welchen Wert das Residuum des Pols hat, der im Einheitskreis liegt.

(b) Zeigen Sie, dass dieses komplexe Wegintegral dem folgenden reellen Integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \frac{1}{3+\cos\theta}$ gleich ist.

[K5] *Ableitungen* **[3 Punkte]**

Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r(r+z)}$, wobei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist.

[K6] *Elektromagnetisches Feld* **[$1+2+1=4$ Punkte]**

Im Vakuum hat das magnetische Feld $\vec{B}(t,\vec{x})$ einer ebenen, elektromagnetischen Welle die Form

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \Re\mathrm{e}\Big(\vec{B}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\Big)\,,$$

wobei $\Re\mathrm{e}$ den Realteil bezeichnet.

(a) Welche Bedingung müssen die komplexe Amplitude $\vec{B}_0$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen, damit die Maxwellgleichung $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ gilt?

(b) Welchen Wert hat das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(t,\vec{x})$, das die Vakuum-Maxwellgleichungen $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{B} - \partial_t\vec{E} = 0$ erfüllt?

(c) Welchen Wert muss die Kreisfrequenz ω haben, damit die Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$ gilt?