PROBEKLAUSUR

Bearbeiten Sie das Blatt ohne Hilfsmittel, ohne in Ihren Notizen nachzusehen. Die Bearbeitungszeit sollte der Dauer der Präsenzübung entsprechen, also maximal 105 Minuten. Eine Musterlösung wird am 21.07.2015 ins Stud.IP eingestellt. Sie können dann feststellen, wo Sie Lücken haben. Eine Klausur ist mit Sicherheit ab der Hälfte der Punkte bestanden, hier also ab 14 Punkte.

[K0] *Kurzfragen* **[$1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Die Wellengleichung $\Box u = 0$ werde durch $u(t,\vec{x}) = A\,\exp(\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t))$ gelöst. Wie hängt ω mit $\vec{k}$ zusammen?
(b) Es sei $\tilde{g}(k)$ die Fouriertransformierte von $g(x)$. Wie lautet die Fouriertransformierte von $\partial_x g(x)$ dann?
(c) Was gibt der Poynting-Vektor an?
(d) Wie ist das elektrische Dipolmoment definiert?
(e) Was ist eine Greensche Funktion?
(f) Was ist die Lorenzeichung?

[K1] *Quadrupoltensor* **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Komponenten des Quadrupoltensors

$$Q^{ij} = \int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})(3x^i x^j - \delta^{ij}\vec{x}^2)$$

einer homogen geladenen Kugelschale als Funktion der Gesamtladung Q und des Innen- und Außenradiuses r und R. *Hinweis*: Berechnen Sie zunächst $\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})\vec{x}^2$ und überlegen Sie, welche Werte $\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})x^i x^j$ aus Symmetriegründen nur annehmen kann.

[K2] *Integralsätze* **[$2+2=4$ Punkte]**

Bestimmen Sie mit Hilfe angemessener Ansätze und geeigneter Integralsätze und Integrationsbereiche Felder für folgende Situationen:

(a) das elektrische Feld innerhalb einer kugelsymmetrischen, zeitunabhängigen Ladungsverteilung;
(b) das magnetische Feld innerhalb einer zylindersymmetrischen, zeitunabhängigen Stromverteilung.

Zeichnen Sie in beiden Fällen die Integrationsbereiche. Was besagt Ihr Ergebnis für die Felder außerhalb der Ladungs- und Stromdichte?

[K3] *Fouriertransformation* **[$2+1+1=4$ Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,g(x)$$

eines Spaltes der Breite L,

$$g_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{L} & -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & |x| > \frac{L}{2} \end{cases},$$

gegeben ist als

$$\tilde{g}_L(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{kL}\,\sin\frac{kL}{2}\,.$$

(b) Was ist das Fourierspektrum $\tilde{g}_L$ im Grenzfall $L \to 0$?
(c) Zeigen Sie durch Anwenden auf Testfunktionen, dass g_L mit $L \to 0$ gegen die δ-Distribution strebt. Was ist also das Fourierspektrum der δ-Distribution?

[K4] *Residuensatz* **[$2+2=4$ Punkte]**

Betrachten Sie das Integral

$$\oint_\Gamma \mathrm{d}z\,\frac{-2}{z^2 - 4\mathrm{i}z - 1}\,,$$

wobei Γ der im Gegenzeigersinn durchlaufene Einheitskreis sei, $\theta \mapsto z(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) Berechnen Sie dieses Integral mit dem Residuensatz. Geben Sie dazu an, wo die Pole des Integranden liegen und welchen Wert das Residuum des Pols hat, der im Einheitskreis liegt.
(b) Zeigen Sie, dass dieses komplexe Wegintegral dem folgenden reellen Integral gleich ist:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,\frac{1}{2 - \sin\theta}$$

[K5] *Ableitungen* **[2 Punkte]**

Berechnen Sie für $r \neq 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{x^i}{r^3}\right)$.

[K6] *Magnetfeld* **[$2+2=4$ Punkte]**

Berechnen Sie sowohl für $x^2+y^2 < R^2$, als auch für $x^2+y^2 \ge R^2$ die Rotation und die Divergenz des Magnetfeldes

$$\vec{B}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{I}{R^2}\vec{e}_\varphi & \text{falls } \sqrt{x^2+y^2} < R \\ \frac{1}{4\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_\varphi & \text{falls } \sqrt{x^2+y^2} \ge R \end{cases}.$$

Dabei sind der Strom I und der Radius R reelle Konstanten, der Einheitsvektor in φ-Richtung ist $\vec{e}_\varphi = (-y,x,0)/\sqrt{x^2+y^2}$.

CHECKLISTE

Anhand dieser Checkliste können Sie sehen, welche in der Vorlesung und den Übungen behandelten Punkte uns als wichtig erscheinen. Unabhängig von der Klausur sind das die Punkte, die man als Physiker so im Kopf haben sollte. Alle diese Punkte sind im Skript zu finden. Es geht nicht darum, komplizierte Formeln auswendig zu können, sondern die Konzepte (grob) verstanden zu haben.

[1] Wirkungsprinzip:
- Prinzip der stationären Wirkung
- Eulerableitung
- Noetherladung und Noethertheorem

[2] Maxwellgleichungen:
- Lorentzkraft
- Maxwellgleichungen in differentieller Form
- Integralsätze von Gauß und Stokes
- Kontinuitätsgleichung

[3] Viererpotential:
- Vektorpotential
- Skalares Potential
- Eichtransformation und Lorenzbedingung

[4] Potentialtheorie:
- Greenfunktion
- Spiegelladungsmethode
- Oberflächenladungsdichte

[5] Distributionen:
- Diracsche δ-Distribution
- Ableitungen von Distributionen

[6] Komplex differenzierbare Funktionen:
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen
- Komplexes Wegintegral
- Residuensatz

[7] Fouriertransformation:
- Orthonormale Funktionensysteme
- Parsevalsche Gleichung
- Fourierreihe (komplex)
- Fouriertransformation und ihre Eigenschaften

[8] Wellengleichung:
- Wellengleichung in zwei Dimensionen
- Dispersion
- Ebene Wellen
- Wellengleichung in vier Dimensionen
- Wellenpaket
- Retardiertes Potential

[9] Fernfeld einer Ladungsverteilung:
- Dipolmomente, Quadrupolmoment
- Poyntingvektor
- Fernfeld einer Punktladung (qualitative Eigenschaften)

[10] Kovariante Maxwellgleichungen:
- Feldstärketensor
- Viererpotential
- Eichinvarianz und Lorenzbedingung
- Kovarianz der Maxwellgleichungen
- Feldstärken einer gleichförmig bewegten Ladung (qualitative Eigenschaften)