

15.05.2015

MEHR VEKTORANALYSIS

Wir erarbeiten uns weiter Routine im Umgang mit der Vektoranalysis, diskutieren auch kurz ein Beispiel im Zusammenhang mit Differentialformen.

[P9] *Rotation und Divergenz*

Eine statische Ladung sei zylindersymmetrisch verteilt. In welche Richtung zeigt das elektrische Feld \vec{E} ? Bestimmen Sie $E = |\vec{E}|$ als Funktion von $\sqrt{x^2 + y^2}$, und berechnen Sie $\text{rot } \vec{E}$ und $\text{div } \vec{E}$. Welche Form hat das zugehörige Potential? *Hinweis:* Beachten Sie, dass die Problemstellung im Prinzip zweidimensional ist.

[P10] *Kontinuitätsgleichung*

Gegeben sei eine Ladungsdichte

$$\rho(t, \vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{y}(t)),$$

die um die Kurve $\vec{y}(t)$ verteilt ist, sowie die zugehörige Stromdichte

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \dot{\vec{y}}(t) f(\vec{x} - \vec{y}(t)).$$

Überprüfen Sie, dass diese die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \text{div } \vec{j} = 0$ erfüllen.

[P11] *Flächenelemente*

Geben Sie (dx, dy, dz) in Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

als Linearkombinationen in dr , $d\theta$ und $d\varphi$ an. Geben Sie ebenso die Flächenprodukte $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ und $dx \wedge dy$ an. Berücksichtigen Sie dabei, dass das Flächenprodukt bilinear und alternierend ist. Vergleichen Sie auf einer Kugeloberfläche, $dr = 0$, mit $\vec{e}_r d\cos\theta d\varphi$. Geben Sie schließlich das Volumenelement $d^3x = dx \wedge dy \wedge dz$ in Kugelkoordinaten an.