Hausübung IV zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2011/12

Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe 11.11.2011 vor der Plenarübung

MATRIZEN

Lineare Abbildungen eines Vektorraumes werden durch Matrizen beschrieben. Von besonderem Interesse sind lineare Abbildungen des Vektorraumes auf sich selbst, die bestimmte Symmetrien erfüllen.

[H13] *Längenerhaltung* **[$2 + 2 + 2 = 6$ Punkte]**

Wir betrachten einen zwei-dimensionalen Raum und lineare Abbildungen in Form von Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Wir wollen unter allen möglichen Matrizen M diejenigen finden, die die Länge der Vektoren erhalten. Es soll also gelten: $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$.

(a) Finden Sie Bedingungen an a, b, c, d, indem Sie beachten, dass die Spalten der Matrix M die Bilder der Basisvektoren der Standardbasis sind. Verwenden Sie, dass die Längen der Basisvektoren, sowie ihre Orthogonalität, unverändert bleiben sollen. (Warum darf sich auch der Winkel zwischen den Basisvektoren nicht ändern?)

(b) Die gefundenen Bedingungen sollten Sie an Relationen trigonometrischer Funktionen denken lassen. Überlegen Sie, wie die Bedingungen erfüllt werden können, in dem Sie für a, b, c, d in geeigneter Weise möglichst einfache Ausdrücke in $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ einsetzen. Sie sollten *zwei* grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten finden, die einen mit Determinante $+1$, die anderen mit Determinante -1.

(c) Welche Abbildungen werden also durch die in (b) gefundenen Matrizen beschrieben? Versuchen Sie, die Lösungen M' mit Determinante -1 aus den Lösungen M mit Determinante $+1$ zu erhalten, in dem Sie einen der Basisvektoren zunächst an einer geeigneten Achse spiegeln. Versuchen Sie also $M' = SM$ zu schreiben und bestimmen Sie die Matrix S.

[H14] *Spiegelungen und Drehungen* **[$1 + 1 + 2 + 2 = 6$ Punkte]**

Wir untersuchen Abbildungen, die Spiegelungen an einer beliebigen Achse im zwei-dimensionalen Raum involvieren. Hierbei soll unter "'Spiegelung an einer Achse" verstanden werden, dass ein zur Achse senkrechter Vektor in sein Negatives überführt wird.

(a) Wie lauten die Matrizen für eine Spiegelung an der $\vec{e}_1$-Achse, und an der $\vec{e}_2$-Achse?

(b) Es bezeichne $\vec{n}$ einen Einheitsvektor, $|\vec{n}|^2 = 1$. Dieser schließe mit der $\vec{e}_1$-Achse einen Winkel, α, ein. Drücken Sie $\vec{n}$ in der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ aus.

(c) Beschreiben Sie eine Spiegelung an der $\vec{n}$-Achse, indem Sie eine Drehung um 2α vornehmen, und anschließend den *neuen* Basisvektor $\vec{e}_2{}'$ an der *neuen* $\vec{e}_1{}'$-Achse spiegeln. Wie lautet die zugehörige Matrix?

(d) Beschreiben Sie die gleiche Spiegelung nun wie folgt: Drehen Sie zunächst um den Winkel α, so dass $\vec{e}_1{}' = \vec{n}$ wird. Dann ist $\vec{e}_2{}' = \vec{n}_\perp$, so dass Sie die Spiegelung von $\vec{e}_2{}'$ an der $\vec{n}$-Achse ganz leicht angeben können. Drehen Sie das Resultat nochmals um den Winkel α. Wie lauten die Matrizen für die jeweiligen Schritte erste Drehung, erste Drehung und Spiegelung, erste Drehung und Spiegelung und zweite Drehung? Zeigen Sie, dass das Resultat mit (c) übereinstimmt. *Hinweis*: Nutzen Sie die Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$ für die Winkelverdopplung.

BITTE WENDEN

[H15*] *Spiegelungen und Drehungen II* **[1* + 1* + 1* + 1* + 1* + 1* = 6* Extrapunkte]**

Wir untersuchen an einem konkreten Beispiel, wie jede Drehspiegelung als eine Dehung um eine Achse $\vec{n}$ und eine Spiegelung an der zur Drehachse senkrechten Ebene dargestellt werden kann. Wir gehen von folgender Drehspiegelung aus:

$$M = \Pi_{(1,3)} D_{\alpha \vec{e}_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dies ist offenbar eine Drehung um die z-Achse mit einer *anschließenden* Spiegelung, die den ersten und den drittten *neuen* Basisvektor vertauscht. Wir wollen dies in der Form $M = P_{\vec{n}} D_{\beta\vec{n}}$ schreiben.

(a) Berechnen Sie die Determinatne von $\Pi_{(1,3)}$ und überprüfen Sie, dass $\Pi_{(1.3)}$ ein rechtshändiges in ein linkshändiges Koordinatensystem überführt.

(b) Bestimmen Sie die Drehachse $\vec{n}$. Berechnen Sie dazu $M = \Pi_{(1,3)} D_{\alpha \vec{e}_z}$ und nutzen Sie aus, dass die Drehachse dieser Drehspiegelung nach Definition in ihr negatives gespiegelt wird. Für die gesuchte Drehachse muss also gelten $M\vec{n} = -\vec{n}$. Dieses Gleichungssystem lässt sich leicht explizit lösen. Geben Sie $\vec{n}$ als normierten Einheitsvektor an.

(c) Bestimmen Sie die Spiegelebene, in dem Sie $\vec{n}$ um zwei Vektoren ergänzen, die auf $\vec{n}$ und auf einander senkrecht stehen. *Hinweis*: Sei $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$. Dann ist offenbar $(-n^2, n^1, 0)$ ein Vektor, der auf $\vec{n}$ senkrecht steht, und der lediglich noch auf Einheitslänge gebracht werden muss. Einen weiteren Vektor, der auf diesen beiden senkrecht steht, finden Sie mit dem Ansatz (n^1, n^2, p). Bestimmen Sie p und bringen Sie auch diesen Vektor auf Einheitslänge.

(d) Bestimmen Sie nun noch den Drehwinkel β, in dem Sie einen der beiden in (c) bestimmten Vektoren mit M drehen und dann das Skalarprodukt aus dem ursprünglichen Vektor mit seinem Bild berechnen. *Hinweis*: Zur Bestimmung des Drehwinkels kann natürlich jeder Vektor aus der Ebene senkrecht zur Spiegelachse verwendet werden. *Anmerkung*: Einfacher bestimmt sich der Drehwinkel aus der in der Vorlesung erwähnten Tatsache, dass für eine Drehspiegelung $\mathrm{Sp}(M) = -1 + 2\cos\beta$ ist, woraus sich $\cos\beta$ direkt ablesen läßt.

(e) Betrachten Sie gesondert den Fall $\alpha \to \pi$, also $\cos\alpha \to -1$. Warum können Sie für diesen Fall nicht einfach die Ergebnisse aus (b) und (c) verwenden?

(f) Warum wird die Ebene senkrecht zur Spiegelachse $\vec{n}$ durch M in sich abgebildet? Wie sieht die Matrix aus, die M in der Basis v, $(Mv)_\perp$ und $\vec{n}$ darstellt? Hierbei ist $v \perp \vec{n}$ beliebig aus der Ebene senkrecht zur Spiegelachse.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!